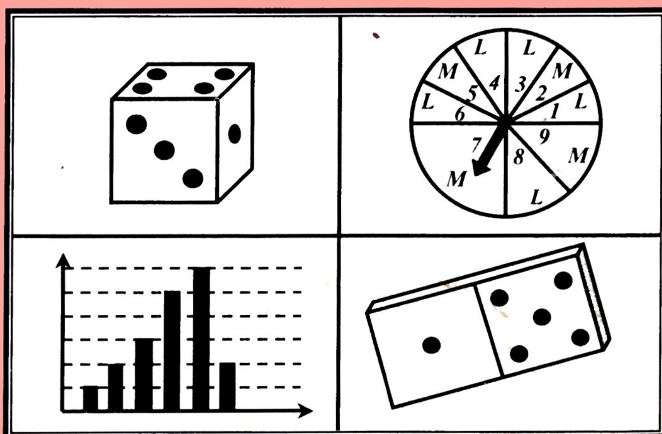
VAIDOTAS MOCKUS, ALGIDĖ JOCAITĖ

KOMBINATORIKOS, TIKIMYBIŲ TEORIJOS IR MATEMATINĖS STATISTIKOS PAMOKŲ KONSPEKTAI

10 - 12 KLASIŲ MOKSLEIVIAMS

* * *



VAIDOTAS MOCKUS, ALGIDĖ JOCAITĖ

KOMBINATORIKOS, TIKIMYBIŲ TEORIJOS IR MATEMATINĖS STATISTIKOS PAMOKŲ KONSPEKTAI

10 - 12 KLASIŲ MOKSLEIVIAMS

* * *

Šiauliai 2001

UDK 519. 1/.2 (075.3)
Mo – 09

Leidinio autoriai: Vaidotas Mockus
Algidė Jocaitė

ISBN 9955 – 9379 – 4 – 7

Turinys

Pratarmė

Knygoje pateiktos trumpos kombinatorikos, tikimybių teorijos ir matematinės statistikos pradmenų kurso teorinės žinios, tipinių uždavinių sprendimo pavyzdžiai, užduotys savikontrolei (su atsakymais), tikrinamųjų darbų pavyzdžiai.

Leidinyje pateikta medžiaga apima visą mokyklinę programą.

Knyga skirta bendrojo lavinimo mokyklų vyresniųjų klasių moksleiviams ir matematikos mokytojams.

Autoriai

I skyrius

KOMBINATORIKA

Kombinatorika yra matematikos sritis, nagrinėjanti, kiek skirtingų kombinacijų, tenkinančių tam tikras sąlygas, galima sudaryti iš baigtinio skaičiaus turimų objektų.

1. Bendrieji kombinatorikos dėsniai

1.1. Kombinatorinė sudėties taisyklė

Jei kuriam nors objektui A_1 pasirinkti yra n_1 būdų, objektui A_2 pasirinkti yra n_2 būdų, ... , objektui A_k pasirinkti yra n_k būdų, tai pasirinkti arba A_1, arba A_2, ... , arba A_n yra $n_1 + n_2 + \ldots + n_k$ būdų. Dviejų objektų A ir B atveju, kombinatorinė sudėties taisyklė formuluojama taip:

jei objektui A parinkti yra n būdų, o objektui B parinkti yra m būdų, tai pasirinkti A arba B yra $n + m$ būdų.

1 pavyzdys. Jei vienoje dėžėje yra 20 skirtingų geltonų kamuoliukų, kitoje dėžėje yra 10 skirtingų raudonų kamuoliukų, o trečioje – 5 skirtingi mėlyni kamuoliukai, tai pasirinkti vieną geltoną kamuoliuką yra 20 būdų, vieną raudoną kamuoliuką – 10 būdų, vieną mėlyną – 5 būdai. Vieną kamuoliuką (geltoną, raudoną arba mėlyną) galima pasirinkti $20 + 10 + 5 = 35$ būdais. **Atsakymas.** 35.

2 pavyzdys. Parduotuvėje yra 6 rūšių šokoladinių saldainių ir 4 rūšių karamelės. Keliais būdais galima nusipirkti vienos rūšies (arba šokoladinių, arba karamelės) saldainių?

Sprendimas. Šokoladinių saldainių galima nusipirkti 6 būdais, o karamelės – 4 būdais. Remiantis kombinatorine sudėties taisykle, vienos rūšies saldainių (arba šokoladinių, arba karamelės) galima nusipirkti $6 + 4 = 10$ būdų. **Atsakymas.** 10.

3 pavyzdys. Knygų lentynoje yra 20 skirtingų algebros knygų, 12 skirtingų geometrijos knygų, 7 skirtingos tikimybių teorijos knygos ir 25 skirtingos grožinės literatūros knygos. Keliais būdais galima išsirinkti vieną matematikos knygą? Keliais būdais galima paimti knygą?

Sprendimas. Vieną algebros knygą pasirinkti galima 20 būdų, pasirinkti vieną geometrijos knygą galima 12 būdų, o pasirinkti vieną tikimybių teorijos knygą galima 7 būdais. Pagal sudėties taisyklę vieną matematikos knygą (arba algebros, arba geometrijos, arba tikimybių teorijos) galima pasirinkti $20 + 12 + 7 = 39$ būdais, o knygą galima pasirinkti $20 + 12 + 7 + 25 = 64$ būdais. **Atsakymas.** 39; 64.

1.2. Apibendrintoji sudėties taisyklė

Paprastoji sudėties taisyklė taikoma tik tada, kai pasirinkimų aibės neturi bendrųjų elementų (daiktų, objektų). Jei elementai kartojasi, tai reikia taikyti apibendrintąją sudėties taisyklę.

Jei objektui A parinkti yra n būdų, o objektui B parinkti yra m būdų, ir jie turi k bendrų elementų, tai pasirinkti arba A, arba B yra $n + m - k$ būdų.

1 pavyzdys. Visi klasės mokiniai dalyvauja nepamokinėje veikloje. 14 mokinių žaidžia tinklinį, 16 mokinių mokosi piešti, o 7 mokiniai žaidžia tinklinį ir mokosi piešti. Kiek mokinių yra klasėje?

Sprendimas. Jei kiekvienas mokinys lankytų tik po vieną būrelį, tai mokinių skaičius būtų lygus $14 + 16 = 30$. Kadangi 7 mokiniai lanko po du būrelius, tai tie mokiniai sumoje $14 + 16$ įskaitomi 2 kartus, todėl tą skaičių reikia atimti. Vadinasi, klasėje yra $14 + 16 - 7 = 23$ mokiniai.

Atsakymas. 23.

2 pavyzdys. 54 mokyklos mokiniai sportuoja: žaidžia futbolą arba krepšinį.

1. 35 mokiniai žaidžia futbolą, 23 mokiniai žaidžia krepšinį. Kiek mokyklos mokinių žaidžia ir futbolą, ir krepšinį?

2. 32 mokiniai žaidžia krepšinį, 15 mokinių žaidžia ir krepšinį, ir futbolą. Kiek mokinių žaidžia: a) futbolą; b) žaidžia tik futbolą?

Sprendimas. Pažymėkime žaidžiančių futbolą mokinių skaičių m(F), žaidžiančių krepšinį mokinių skaičių m(K), žaidžiančių ir futbolą, ir krepšinį – m(FK).

1. Šiuos skaičius sieja formulė:

$m(F) + m(K) - m(FK) = 54$, kur $m(F) = 35$, o $m(K) = 23$.

Vadinasi, $35 + 23 - m(FK) = 54$, todėl $m(FK) = 4$. **Atsakymas.** 4.

2. a) Kadangi $m(K) = 32$, $m(FK) = 15$, todėl

$32 + m(F) - 15 = 54$, t.y. $m(F) = 37$.

b) Tik futbolą žaidžia $m(F) - m(FK)$ mokinių, todėl iš formulės gauname $m(F) - m(FK) = 54 - m(K)$. Vadinasi, tik futbolą žaidžia $54 - 32 = 22$ mokiniai. Galima tą skaičių rasti pasinaudojus a) atveju rastu $m(F) = 37$, t.y. $m(F) - m(FK) = 37 - 15 = 22$.

Atsakymas. a) 37; b) 22.

1.3. Kombinatorinė daugybos taisyklė

Jei kuriam nors elementui pasirinkti yra k_1 būdas, elementui x_2 pasirinkti yra k_2 būdai, elementui x_3 – k_3 būdai, tai elementų rinkinį $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ galime pasirinkti $k_1 \cdot k_2 \cdot k_3 \cdot \ldots \cdot k_n$ būdais.

Dviejų elementų x ir y atveju užrašytoji taisyklė formuluojama taip: jeigu kuriam nors elementui x pasirinkti yra k būdų, o elementui y – m būdų, tai elementų x ir y porą (x, y) galime pasirinkti $k \cdot m$ būdais.

1 pavyzdys. Valgyklos meniu yra 3 pirmieji, 4 antrieji ir 2 tretieji patiekalai. Keliais būdais galima sudaryti 3 skirtingų patiekalų (1 pirmasis, 1 antrasis ir 1 trečiasis) rinkinį pietums?

Sprendimas. Pirmąjį patiekalą galime parinkti 3 būdais, antrąjį patiekalą galime parinkti 4 būdais, o trečiąjį – 2 būdais. Remiantis kombinatorine daugybos taisykle, 3 skirtingų patiekalų rinkinį (į jį įeina 1 pirmasis, 1 antrasis, 1 trečiasis patiekalai) galime sudaryti $3 \cdot 4 \cdot 2 = 24$ būdais. **Atsakymas.** 24.

2 pavyzdys. Vienas studentas turi 7 skirtingas matematikos knygas, o kitas – 9. Keliais būdais studentai gali pasikeisti knygomis (kiekvienas studentas gauna po vieną kito studento knygą)?

Sprendimas. Pirmasis studentas pasikeitimui knygomis iš turimų 7 matematikos knygų vieną knygą gali pasirinkti 7 būdais, o antrasis – iš turimų 9 skirtingų matematikos knygų vieną knygą gali pasirinkti 9 būdais. Remiantis kombinatorine daugybos taisykle, knygų porą (pirmoji yra pirmojo studento, o antroji – antrojo) galima sudaryti $7 \cdot 9 = 63$ būdais. Vadinasi, studentai pasikeisti knygomis gali 63 būdais. **Atsakymas.** 63.

3 pavyzdys. Parduotuvėje yra 6 rūšių šokoladinių saldainių ir 4 rūšių karamelės. Keliais būdais galime sudaryti pirkinį, kuriame būtų vienos rūšies šokoladinių ir vienos rūšies karamelės saldainių?

Sprendimas. Vienos rūšies šokoladinių saldainių galime nusipirkti 6 būdais, o vienos rūšies karamelės – 4 būdais. Pagal daugybos taisyklę pirkinį, į kurį įeitų vienos rūšies šokoladiniai saldainiai ir vienos rūšies karamelė, galime sudaryti $6 \cdot 4 = 24$ būdais. **Atsakymas.** 24.

4 pavyzdys. Iš 20 klasės mokinių reikia išsirinkti seniūną ir jo pavaduotoją. Kiek gali būti skirtingų rinkimo rezultatų?

Sprendimas. Seniūną galima išrinkti yra 20 būdų, nes kiekvienas mokinys gali būti seniūnu, o pavaduotoją – 19 būdų, nes tas pats moksleivis negali būti ir seniūnu, ir pavaduotoju. Todėl išrinkti seniūną ir jo pavaduotoją pagal daugybos taisyklę yra $20 \cdot 19 = 380$ skirtingų būdų.

Atsakymas. 380.

1.4. Apibendrintoji kombinatorinė daugybos taisyklė

Jei kuriam nors objektui a_1 pasirinkti yra m_1 būdų, o po kiekvieno tokio pasirinkimo objektą a_2 galima pasirinkti m_2 būdų, po kiekvienų tokių dviejų pasirinkimų objektą a_3 galima pasirinkti m_3 būdų, ..., po tokių k pasirinkimų objektą a_k galima pasirinkti m_k būdų, tai objektų rinkinį $(a_1, a_2, \dots, a_k)$ galime pasirinkti $m_1 \cdot m_2 \cdot \dots \cdot m_k$ būdais.

1pavyzdys. Rasime, kiek triženklių skaičių su skirtingais skaitmenimis galima sudaryti iš keturių skaitmenų 4, 3, 5, 8.

Sprendimas. Pirmąjį skaitmenį galima pasirinkti 4 būdais (galima paimti bet kurį iš duotųjų 4 skaitmenų). Antrąjį skaitmenį galima pasirinkti

3 būdais (galima paimti bet kurį iš 3 po pirmojo pasirinkimo likusių skaitmenų). Trečiąjį skaitmenį galima pasirinkti 2 būdais (galima pasirinkti bet kurį iš 2 po antrojo pasirinkimo likusių skaitmenų). Pagal daugybos taisyklę triženkliam skaičiui sudaryti yra $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ būdai.

Atsakymas. 24.

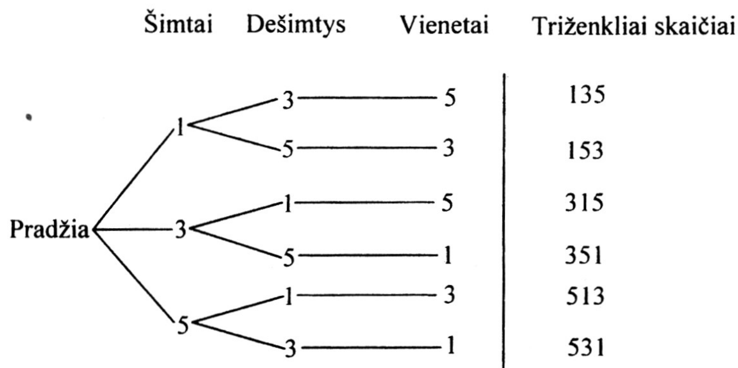
2 pavyzdys. Iš 25 lietuviškos abėcėlės raidžių sudaromi 4 raidžių junginiai taip, kad juose gretimos raidės būtų skirtingos. Kiek tokių raidžių junginių galima sudaryti?

Sprendimas. Pirmąją raidę galima pasirinkti 25 būdais. Po pirmosios raidės pasirinkimo antrąją raidę galima pasirinkti tik 24 būdais, nes kartoti pirmosios raidės negalima. Trečioji raidė turi skirtis nuo antrosios (nors gali sutapti su pirmąja). Todėl trečiąją raidę galime pasirinkti taip pat 24 būdais. Ketvirtoji raidė turi skirtis nuo trečiosios (nors gali sutapti su antrąja arba pirmąja raide). Todėl ketvirtąją raidę galime pasirinkti taip pat 24 būdais. Remdamiesi apibendrintąja kombinatorine daugybos taisykle, gauname, kad 4 raides galime pasirinkti $25 \cdot 24 \cdot 24 \cdot 24 = 345600$ būdais.

Atsakymas. 345600.

3 pavyzdys. Kiek triženklių skaičių galima sudaryti iš skaitmenų 1, 3, 5, jeigu skaitmenys nesikartoja?

Sprendimas. Pirmąjį skaitmenį (šimtų) galime pasirinkti 3 būdais, t.y. galime pasirinkti bet kurį iš trijų skaitmenų 1, 3, 5. Po kiekvieno tokio pirmojo skaitmens pasirinkimo antrąjį skaitmenį (dešimčių) galime pasirinkti tik 2 būdais, nes į antrojo skaitmens vietą galime parašyti bet kurį iš dviejų po pirmojo pasirinkimo likusių skaitmenų (pirmojo išrinktojo skaitmens rašyti negalime, nes pagal uždavinio sąlygą skaitmenys skaičiuje neturi kartotis). Po pirmųjų dviejų skaitmenų pasirinkimo į trečiojo skaitmens (vienetų) vietą galime rašyti tik vieną likusįjį skaitmenį, t.y. trečiajam skaitmeniui pasirinkti yra tik 1 būdas. Pagal apibendrintąją kombinatorinę daugybos taisyklę galime sudaryti $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ triženklius skaičius su skirtingais skaitmenimis. Šio uždavinio grafinė iliustracija yra specialus grafas, vadinamas galimybių "medžiu":



Atsakymas. 6.

4 pavyzdys. Duoti skaičiai 0, 4, 3, 8, 7. Kiek galima sudaryti:

1) triženklių skaičių;

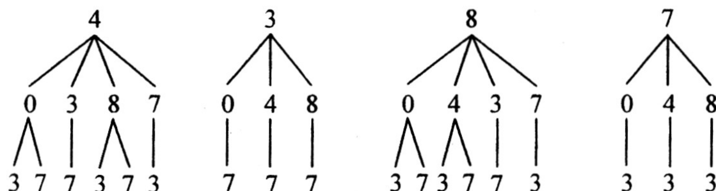
2) nelyginių triženklių skaičių, jei skaitmenys skaičiuje nesikartoja?

Sprendimas.

1. Pirmąjį skaitmenį galima pasirinkti 4 būdais, nes pirmasis skaitmuo negali būti 0. Antrąjį skaitmenį galima pasirinkti 5 būdais, nes skaitmenys gali kartotis ir antrasis skaitmuo gali būti 0. Trečiąjį skaitmenį galima pasirinkti taip pat 5 būdais. Pagal kombinatorinę daugybos taisyklę triženklių skaičių yra $4 \cdot 5 \cdot 5 = 100$. **Atsakymas.** 100.

2. Pirmąjį skaitmenį galime pasirinkti 3 būdais, nes negalime imti 0 ir vieno iš nelyginių skaičių (arba 3, arba 7). Antrąjį skaitmenį galima pasirinkti 3 būdais, nes dabar galime imti ir 0, bet negalime pasirinkti vieno iš nelyginių skaičių. Trečiąjį skaitmenį renkamės 2 būdais (arba3, arba 7). Pagal daugybos taisyklę triženkliam skaičiui sudaryti yra $3 \cdot 3 \cdot 2 = 18$ būdų.

Atsakymą galime gauti, nubraižius galimybių „medį“.



Gauti skaičiai: 403, 407, 437, 483, 487, 473, 307, 347, 387, 803, 807, 843, 847, 837, 873, 703, 743, 783.

Iš duotųjų skaičių 0, 4, 3, 8, 7 galima sudaryti 18 nelyginių triženklių skaičių su nesikartojančiais skaitmenimis. **Atsakymas.** 18.

1.5. Kombinatorinė sudėties ir daugybos taisyklė

Kai kuriuos kombinatorikos uždavinius galima išspręsti taikant tam pačiam uždaviniui kombinatorinę sudėties ir kombinatorinę daugybos taisyklę.

1 pavyzdys. Kiek skirtingų junginių, kuriuos sudaro ne mažiau kaip keturios skirtingos raidės, galima sudaryti iš žodžio LAISVĖ raidžių?

Sprendimas. Žodį LAISVĖ sudaro šešios skirtingos raidės. Pagal kombinatorinę daugybos taisyklę galime sudaryti $N_1 = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$ junginių, sudarytų iš keturių raidžių, $N_2 = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 720$ junginių, sudarytų iš penkių raidžių, $N_3 = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$ junginių, sudarytų iš šešių raidžių. Pagal kombinatorinę sudėties taisyklę iš viso galima sudaryti $N = 360 + 720 + 720 = 1800$ junginių, kuriuos sudaro ne mažiau kaip keturios raidės. **Atsakymas.** 1800.

2 pavyzdys. Kiek yra ne mažesnių už 100 ir mažesnių už 10000 natūraliųjų skaičių, kurie dalijasi iš 5?

Sprendimas. Kad skaičius dalintųsi iš 5 paskutinis skaitmuo turi būti 0 arba 5, o pirmasis skaitmuo negali būti 0. Skaičius galime sudaryti iš skaitmenų 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Triženklio skaičiaus (nuo 100 iki 999) pirmąjį skaitmenį galima pasirinkti 9 būdais, antrąjį skaitmenį – 10 būdų (gali būti 0), o trečiąjį skaitmenį – 2 būdais (0 arba 5). Pagal daugybos taisyklę triženklių skaičių yra $9 \cdot 10 \cdot 2 = 180$. Keturženklio skaičiaus (nuo 1000 iki 9999) pirmąjį skaitmenį galima pasirinkti 9 būdais, antrąjį – 10, trečiąjį – 10, o ketvirtąjį – 2 būdais. Keturženklių skaičių yra $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 2 = 1800$. Todėl skaičių nuo 100 iki 9999, kurie dalijasi iš 5, pagal sudėties taisyklę yra $180 + 1800 = 1980$. **Atsakymas.** 1980.

3 pavyzdys. Lentynoje yra 3 skirtingų mėnesių žurnalai „Panelė“, 5 skirtingų mėnesių žurnalai „Laima“, 4 skirtingų mėnesių žurnalai „Ji“ ir 7 skirtingų mėnesių žurnalai „Moteris“. Kiek skirtingų pasirinkimo galimybių turi mergaitė, jei ji nori paimti: 1) vieną žurnalą, 2) du skirtingų pavadinimų žurnalus, 3) tris skirtingų pavadinimų žurnalus, 4) ne daugiau, kaip tris skirtingų pavadinimų žurnalus?

Sprendimas. Pažymime žurnalų pavadinimus: „Panelė“ – P, „Laima“ – L, „Ji“ – J, „Moteris“ – M.

1) Pasirinkti vieną žurnalą mergaitė turi $3 + 5 + 4 + 7 = 19$ galimybių.

2) Galimi žurnalų pasirinkimo variantai pagal daugybos taisyklę:

Žurnalų „Panelė“ ir „Laima“ komplektui pasirinkti yra $3 \cdot 5 = 15$ būdų;

Žurnalų „Panelė“ ir „Ji“ komplektui pasirinkti yra $3 \cdot 4 = 12$ būdų;

Žurnalų „Panelė“ ir „Laima“ komplektui pasirinkti yra $3 \cdot 7 = 21$ būdas;

Žurnalų „Laima“ ir „Ji“ komplektui pasirinkti yra $5 \cdot 4 = 20$ būdų;

Žurnalų „Laima“ ir “Moteris” komplektui pasirinkti yra $5 \cdot 7 = 35$ būdai;

Žurnalų „Ji“ ir „Moteris“ komplektui pasirinkti yra $4 \cdot 7 = 28$ būdai;

Pagal sudėties taisyklę du skirtingų pavadinimų žurnalus mergaitė gali pasirinkti $15 + 12 + 21 + 20 + 35 + 28 = 131$ būdu.

3) Trijų skirtingų pavadinimų žurnalų pasirinkimo variantai:

PLJ – $3 \cdot 5 \cdot 4 = 60$ būdų;

PLM – $3 \cdot 5 \cdot 7 = 105$ būdai;

LJM – $5 \cdot 4 \cdot 7 = 140$ būdų;

PJM – $3 \cdot 4 \cdot 7 = 84$ būdai.

Žurnalus galima pasirinkti $60 + 105 + 140 + 84 = 389$ būdais.

4) Galima pasirinkti arba vieną, arba du, arba tris skirtingų pavadinimų žurnalus, todėl ne daugiau kaip tris skirtingų pavadinimų žurnalus galima pasirinkti $19 + 131 + 389 = 539$ būdais.

Atsakymas. 1) 19; 2) 131; 3) 389; 4) 539.

Uždaviniai savarankiškam darbui

1. Onutė nusprendė įsigyti naminį gyvūną. Ji su tėveliais nuėjo į gyvūnėlių parduotuvę, kur buvo 3 žiurkėnai, 7 papūgos, 4 šunys ir 5 katės. Keliais būdais ji gali išsirinkti: 1) vieną gyvūnėlį; 2) arba papūgą, arba katę; 3) šunį ir žiurkėną?

2. Martynui reikalingas geografijos žemėlapis. Parduotuvėje parduodami 5 rūšių politiniai žemėlapiai, 6 rūšių žemėlapiai su pavaizduotu reljefu, 9 rūšių žemėlapiai su jūrų ir vandenynų srovėmis ir 4 rūšių – su naudingomis iškasenomis. Keliais būdais Martynas gali nusipirkti: 1) vieną žemėlapį; 2) kiekvienos rūšies po vieną žemėlapį?

3. Mergaitė turi 6 žaislinius meškiukus ir 4 pliušinius šuniukus. Savo draugei ji nori padovanoti: 1) arba meškiuką, arba šuniuką; 2) ir meškiuką, ir šuniuką. Kiek pasirinkimo galimybių turi mergaitė?

4. Bufete yra 4 rūšių bandelių, 3 rūšių riestainių ir 5 rūšių pyragaičių. Kiek yra pasirinkimo galimybių, jei norime pirkti: 1) tik vieną iš šių gaminių; 2) visų rūšių po vieną, 3) bandelę ir pyragaitį?

5. Krepšyje yra 10 obuolių, 8 kriaušės, 6 bananai ir 4 apelsinai. Kiek yra galimybių pasirinkti: 1) vieną vaisių; 2) kriaušę ir bananą; 3) obuolį arba apelsiną?

6. Jurgita turi 3 gvaizdikus ir 5 rožes. Gvaizdiką ir rožę ji nori padovanoti mamai. Keliais būdais ji gali išsirinkti gėles?

7. Dėžėje yra 5 raudoni, 3 juodi, 10 mėlynų ir 4 balti rutuliukai. Kiek yra būdų paimti: 1) vieną rutuliuką; 2) visų spalvų po vieną rutuliuką?

8. Tėtis parduotuvėje nori nusipirkti dažų grindims dažyti. Parduotuvėje yra 3 rūšių baltų, 2 rūšių šviesiai rudų ir 4 rūšių tamsiai rudų dažų. Keliais būdais tėtis gali nusipirkti: 1) vienos rūšies dažų; 2) baltų ir tamsiai rudų dažų?

9. Artėjant gimtadieniui Živilė nori sau nusipirkti arba puošnią suknelę, arba kostiumėlį. Parduotuvėje pardavėja parodė vieną ilgą ir tris trumpas sukneles, kostiumėlį, susidedantį iš kelnių ir švarkelio, ir keturis

kostiumėlius, susidedančius iš sijono ir švarkelio. Kiek pasirinkimo galimybių turi Živilė?

10. Mokykloje pirmokėlių yra 28 mergaitės ir 24 berniukai. Keliais būdais paskutiniojo skambučio šventei galima pasirinkti mergaitę ir berniuką.

11. Mama laiko naminius paukščius: 6 žąsis, 4 kalakutus ir 12 vištų. Kiek galimybių turi mama, jei ji nori atiduoti: 1) vieną paukštį; 2) žąsį arba kalakutą?

12. Mama Jonukui leidžia pasirinkti lankyti tik vieną būrelį. Mokykloje veikia 8 būreliai, jaunųjų technikų stotyje – 9 būreliai, moksleivių namuose– 6 būreliai. Kiek galimybių pasirinkti vieną būrelį turi Jonukas?

13. Jurga turi 40 atvirukų, o Agnė – 32 atvirukus. Vieną atviruką jos nori nusiųsti draugei. Kiek pasirinkimo galimybių turi mergaitės?

14. Parduotuvėje parduodamos 9 rūšys „Bravo" ledų, 8 rūšys „Tirpuko" ledų ir 7 rūšys „Igman Vega" ledų. Keliais būdais galime sudaryti pirkinį, kuriame būtų: 1) visų rūšių ledų porcijos; 2) „Bravo" ir „Tirpuko" ledų porcijos; 3) bet kokios ledų porcijos?

15. Spaudos kioske yra 5 rūšių vokų be pašto ženklų ir 4 rūšių vienodos vertės pašto ženklų. Keliais būdais galima pasirinkti voką su pašto ženklu?

16. Iš miesto A į miestą B veda 5 keliai, o iš miesto B į miestą C – 3 keliai. 1) Kiek yra kelių iš miesto A į C per B? 2) Kiek yra kelių nuvykti iš A į C per B ir grįžti taip, kad grįžtant nei viena kelio atkarpa nesutaptų?

17. Bėgimo varžybose dalyvauja 6 sportininkai. Keliais būdais gali pasiskirstyti pirmosios trys vietos?

18. Keliais būdais galima sudėti lentynoje viena šalia kitos 3 skirtingas knygas?

19. Kiek skirtingų trispalvių vėliavėlių su trimis juostomis (arba horizontaliomis, arba vertikaliomis) galima sudaryti iš žalios, baltos ir geltonos spalvų?

20. Keliais būdais galima iš 4 skirtingų knygų išsirinkti 3 ir sudėti jas lentynoje?

21. Keleiviniame traukinyje yra 5 vagonai. Kiek yra būdų paskirstyti po vagonus 5 palydovus, jei kiekvienam vagonui priskiriamas vienas palydovas?

22. Mama turi 6 skirtingų audinių atraižas. Ji leidžia Monikai pasirinkti vieną atraižą suknelei ir vieną – sijonui. Kiek yra skirtingų pasirinkimo galimybių?

23. Mokiniai iš 5 aktyviausių mokinių renka seniūną, jo pavaduotoją ir atstovą į mokyklos mokinių tarybą. Keliais būdais jie gali tai padaryti?

24. Marytė perka sau, sesutei ir broliukui po vieną skirtingų spalvų pieštuką. Parduotuvėje yra 7 skirtingų spalvų pieštukų. Keliais skirtingais būdais Marytė gali pasirinkti pieštukus?

25. Šeima, gyvenanti Vilniuje, vasarą nutarė pailsėti Palangoje. Iš Vilniaus į Palangą vykti ir grįžti jie nori per Kauną. Iš Vilniaus į Kauną galima nuvažiuoti traukiniu arba autobusu, o iš Kauno į Palangą – traukiniu, autobusu, laivu arba lėktuvu. Keliais skirtingais būdais šeima gali pasirinkti maršrutą iš Vilniaus į Palangą ir atgal taip, kad: 1) jokia kelio dalis nebūtų keliaujama tuo pačiu transportu; 2) transporto priemonės kelio atkarpose gali kartotis?

26. Miesto dramos teatre per mėnesį rodomi 7 skirtingi spektakliai, muzikiniame teatre – 8 skirtingos operetės. Kiek galimybių turi pasirinkti žmogus, nutaręs per mėnesį aplankyti: 1) teatrą vieną kartą; 2) muzikinį ir dramos teatrą?

27. Tėtis perka sūnui dviratį. Parduotuvėje yra dviejų gamyklų – Šiaulių ir Minsko – gamybos dviračiai. Kiekvienos gamyklos dviračiai yra trijų spalvų. Be to kiekvienam dviračiui galima pasirinkti 3 skirtingų rūšių atšvaitus. Tėtis leidžia pasirinkti dviratį (gamyklą), jo spalvą ir atšvaitus. Kiek skirtingų galimybių rinktis turi sūnus?

28. Rinkimuose į Lietuvos Seimą rinkėjas gavo 3 biuletenius: referendumo dėl Lietuvos Konstitucijos biuletenį, biuletenį su 6 pavardėmis ir biuletenį su 17 partijų sąrašu. Kiek galimybių pasirinkti balsuojant turėjo neapsisprendęs balsuotojas?

29. Antanas nori įsigyti kastuvą darbams sode. Parduotuvėje yra dviejų rūšių kastuvai (be koto), mediniai kotai be rankenos, su plastmasine rankena, su medine rankena ir plastmasiniai kotai su rankena ir be rankenos. Keliais skirtingais būdais Antanas gali sukomplektuoti kastuvą?

30. Močiutė vaikaičiui gimimo dienos proga pažadėjo nupirkti elektroninį skaičiuotuvą arba laikrodį. Parduotuvėje buvo 12 rūšių skaičiuotuvų ir 8 rūšių laikrodžių. Keliais būdais vaikaitis gali pasirinkti dovaną? Keliais būdais jis galėtų pasirinkti dovaną, jei močiutė dovanotų ir skaičiuotuvą, ir laikrodį?

31. Kiek yra mažesnių už 1000 natūraliųjų skaičių, kurie dalijasi iš 5?

32. Kiek yra natūraliųjų skaičių, mažesnių už 1000 ir neturinčių vienodų skaitmenų?

33. Iš skaitmenų 1, 2, 3, 4, 5 sudaromi triženkliai skaičiai. Kiek galima sudaryti lyginių triženklių skaičių, turinčių skirtingus skaitmenis? Kiek galima sudaryti nelyginių triženklių skaičių su pasikartojančiais skaitmenimis?

34. Kiek yra keturženklių skaičių?

35. Duoti skaičiai 1, 3, 8, 9. Kiek iš šių skaičių galima sudaryti: 1) dviženklių nelyginių skaičių; 2) triženklių skaičių, kurių paskutinis skaitmuo lygus 3?

36. Duoti skaičiai 3, 5, 6, 7, 8, 9. Kiek iš šių skaičių galima sudaryti: 1) keturženklių skaičių su skirtingais skaitmenimis; 2) triženklių skaičių, kurie dalijasi iš 2?

37. Duoti skaičiai 2, 3, 5, 0, 7, 8. Kiek iš šių skaičių galima sudaryti: 1) keturženklių lyginių skaičių; 2) triženklių skaičių, kurie dalijasi iš 5 ir nė vienas skaitmuo skaičiuje nesikartoja?

38. Knygyne yra trijų pavadinimų vokiškų knygų, penkių pavadinimų angliškų knygų, septynių pavadinimų lenkiškų knygų ir dešimt pavadinimų rusiškų knygų. Kiek skirtingų pasirinkimo galimybių turi pirkėjas, jei jis nori pirkti: 1) vieną knygą; 2) dvi skirtingų kalbų knygas; 3) ne daugiau kaip

dvi skirtingų kalbų knygas; 4) tris skirtingų kalbų knygas; 5) ne daugiau kaip tris skirtingų kalbų knygas?

39. Į kalną veda 5 takeliai. Kiek galimybių turi turistas: 1) pakilti ir nusileisti nuo kalno; 2) pakilti ir nusileisti skirtingais takais?

40. „Birutės“ nuomos salone yra įvairios proginės suknelės: 5 baltos ilgos, 6 raudonos trumpos, 7 juodos ilgos, 4 juodos trumpos, 9 margos ilgos. Keliais būdais moteris gali išsinuomoti: 1) suknelę; 2) vienaspalvę suknelę; 3) trumpą ir ilgą sukneles; 4) ilgą ir trumpą juodas sukneles; 5) dvi ilgas skirtingų spalvų sukneles?

41. Klasėje visos mergaitės lanko chorą arba namų ruošos būrelį. 11 mergaičių lanko chorą, 15 – lanko ruošos būrelį, 5 – lanko ir chorą, ir namų ruošos būrelį. Kiek mergaičių yra klasėje?

42. 36 mokiniai papildomai mokosi anglų arba vokiečių kalbos: 23 mokiniai – anglų kalbos, 13 – anglų ir vokiečių kalbų. Kiek mokinių mokosi: 1) vokiečių kalbos; 2) tik vokiečių kalbos; 3) tik anglų kalbos?

2. Junginiai

Junginiai yra įvairios grupės, sudarytos iš bet kokių daiktų ir besiskiriančios viena nuo kitos arba pačiais daiktais, arba jų išsidėstymo tvarka.

Junginio **elementais** yra vadinami daiktai, iš kurių sudaryti junginiai.

Natūraliojo skaičiaus faktorialas (žymimas n!) yra visų natūraliųjų skaičių nuo n iki 1 sandauga:

$$\boxed{n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = n \cdot (n-1)!.}$$

Simbolį n! skaitome: „en faktorialas“.

Susitarta laikyti, kad 0! = 1.

Pavyzdžiui,

$1! = 1,$ $\quad$ $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4 \cdot 3! = 24,$

$2! = 2 \cdot 1 = 2,$ $\quad$ $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5 \cdot 4! = 120,$

$3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3 \cdot 2! = 6,$ $\quad$ $6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6 \cdot 5! = 720.$

2.1. Gretiniai, gretiniai su pasikartojimais

Gretiniai iš n elementų po k yra tokie junginiai, kurių kiekvienas turi k elementų, parinktų iš n elementų, ir kurie vienas nuo kito skiriasi arba pačiais elementais, arba jų išsidėstymo tvarka.

Pavyzdžiui, gretiniai abc, cab, bac yra sudaryti iš tų pačių elementų, tačiau yra skirtingi, nes skiriasi jų elementų išsidėstymo tvarka; gretiniai abd ir cbd yra skirtingi, nes skiriasi pačiais elementais.

Gretinių iš n elementų, paimtų po k elementų, skaičius žymimas A_n^k ($k \le n$, $n, k \in N$). Gretinių skaičių galima apskaičiuoti pagal formules:

$$\boxed{A_n^k = n(n-1)(n-2)\cdot \ldots \cdot(n-(k-1)).}$$

Pavyzdžiui,

$$A_8^5 = 8(8-1)(8-2)(8-3)(8-(5-1)) = 8(8-1)(8-2)(8-3)(8-4) =$$
$$= 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4 = 6720.$$

$$\boxed{A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}.}$$

Pavyzdžiui,

$$A_6^2 = \frac{6!}{(6-2)!} = \frac{6!}{4!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = 5\cdot 6 = 30.$$

Susitarta laikyti, kad $A_0^0 = 1, A_n^0 = 1$.

1 pavyzdys. Sudarysime visus galimus skirtingus gretinius iš 4 elementų x, y, z, u, paimtų po 2 elementus:

xy	xz	xu
yx	zx	ux
yz	yu	zu
zy	uy	uz

Gavome 12 gretinių. Iš tikrųjų, pagal gretinių skaičiavimo formules:

$$A_4^2 = 4\cdot(4-1) = 4\cdot 3 = 12 \quad \text{arba}$$

$$A_4^2 = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{1\cdot 2} = 12.$$

Atsakymas. 12.

2 pavyzdys. Kiek triženklių skaičių su skirtingais skaitmenimis galima sudaryti iš skaičių 2, 4, 6, 8?

Sprendimas.

248	246	486	286
284	264	468	268
428	426	846	826
482	462	864	862
824	624	648	628
842	642	684	682

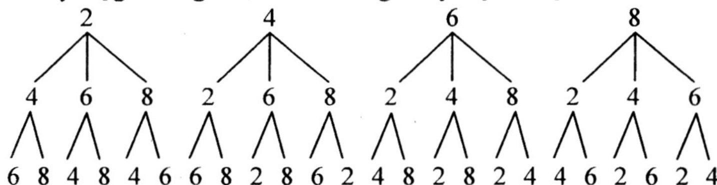
Gavome 24 skaičius.

Pagal gretinių skaičiavimo formules:

$$A_4^3 = 4\cdot(4-1)(4-2) = 4\cdot 3\cdot 2 = 24 \quad \text{arba}$$

$$A_4^3 = \frac{4!}{1!} = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4 = 24.$$

Atsakymą galima gauti, nubraižius galimybių “medį”:



Gauti skaičiai: 246, 248, 264, 268, 284, 286, 426, 428, 462, 468, 486, 482, 624, 628, 642, 648, 682, 684, 824, 826, 842, 846, 862, 864.

Atsakymas. 24.

3 pavyzdys. Keliais būdais galima susodinti 5 mokinius 22 kėdėse?

Sprendimas.

$$A_{22}^5 = 22(22-1)(22-2)(22-3)(22-4) = 3160080 \quad \text{arba}$$

$$A_{22}^5 = \frac{22!}{(22-5)!} = 18 \cdot 19 \cdot 20 \cdot 21 \cdot 22 = 3160080.$$

Atsakymas. 3160080.

4 pavyzdys. Kiek skirtingų dviženklių skaičių galima parašyti penkiais nelyginiais skaitmenimis 1, 3, 5, 7, 9, jeigu skaitmenys tame pačiame skaičiuje nesikartoja?

Sprendimas. Kadangi skirtingi skaičiai turi skirtis bent vienu skaitmeniu arba skaitmenų eile, tai tokių skaičių galime parašyti:

$A_5^2 = 5 \cdot 4 = 20.$ **Atsakymas.** 20.

5 pavyzdys. 30 moksleivių grupė pasikeitė fotonuotraukomis. Kiek buvo užsakyta fotonuotraukų?

Sprendimas. Užsakytų fotonuotraukų skaičius yra

$A_{30}^2 = 30 \cdot 29 = 870.$ **Atsakymas.** 870.

6 pavyzdys. Įmonės pavadinimui sudaryti pasirinktos šešios skirtingos raidės. Kiek iš jų galima sugalvoti įmonės pavadinimų, kuriuos sudarytų ne mažiau kaip trys ir ne daugiau kaip penkios skirtingos raidės?

Sprendimas. Įmonės pavadinimų galima sugalvoti iš trijų, keturių ir penkių raidžių. Sudaryti pavadinimą iš trijų raidžių yra $A_6^3 = \frac{6!}{3!} = 4 \cdot 5 \cdot 6 = 120$ galimybių, pavadinimą iš keturių raidžių sudaryti yra $A_6^4 = \frac{6!}{2!} = 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 360$ galimybių, o pavadinimą iš penkių raidžių sudaryti yra $A_6^5 = \frac{6!}{1!} = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$ galimybių.

Pagal kombinatorikos sudėties taisyklę pavadinimą, kurį sudarytų ne mažiau kaip 3 ir ne daugiau kaip 5 skirtingos raidės, galima sudaryti $120 + 360 + 720 = 1200$ būdais. **Atsakymas.** 1200.

7 pavyzdys. Iš skaitmenų 5, 6, 7, 8, 9 sudaromi triženkliai skaičiai. Kiek galima sudaryti lyginių ir nelyginių triženklių skaičių, turinčių skirtingus skaitmenis?

Sprendimas. Pirmiesiems dviem skaitmenims parinkti yra $A_4^2 = \frac{4!}{2!} = 3 \cdot 4 = 12$ galimybių. Paskutinį lyginį skaitmenį galima pasirinkti iš dviejų (6 arba 8). Lyginius triženklius skaičius galima sudaryti 12 · 2 = 24 būdais, t.y. $A_4^2 \cdot 2 = 24$. Kadangi yra duoti trys nelyginiai skaičiai (5, 7, 9), tai nelyginius triženklius skaičius galima sudaryti 12 · 3 = 36 būdais, t.y. $A_4^2 \cdot 3 = 36$. **Atsakymas.** 24 ir 36.

8 pavyzdys. Kiek galima sudaryti natūraliųjų skaičių, iš kurių kiekvienas būtų parašytas 3 skirtingais skaitmenimis?

Sprendimas. Iš 10 skaitmenų 0, 1, 2, ... , 9 galima sudaryti $A_{10}^3 = \frac{10!}{7!} = 8 \cdot 9 \cdot 10 = 720$ skaičius. Iš šio skaičiaus reikia atimti tuos skaičius, kurie prasideda skaitmeniu 0. Tokių skaičius bus tiek, kiek gretinių po 2 skaitmenis galima sudaryti iš skaitmenų 1, 2, ... , 9, t.y. $A_9^2 = \frac{9!}{7!} = 8 \cdot 9 = 72$. Vadinasi, skaičių galima sudaryti

$A_{10}^3 - A_9^2 = 720 - 72 = 648$. **Atsakymas.** 648.

Gretinių su pasikartojimais iš n elementų po k skaičius žymimas $\overline{A}_n^k$ ir apskaičiuojamas pagal formulę

$$\boxed{\overline{A}_n^k = n^k.}$$

1 pavyzdys. Sudarysime visus galimus gretinius su pasikartojimais iš keturių elementų x, y, z, u po 2 elementus:

[xx]	xy	xz	xu
yx	[yy]	yz	yu
zx	zy	[zz]	zu
ux	uy	uz	[uu] .

Iš viso gavome 16 gretinių su pasikartojimais.

Pagal formulę

$$\overline{A}_4^2 = 4^2 = 16 .$$

Praeitame skyrelyje buvome gavę, kad gretinių iš 4 elementų x, y, z, u po 2 skaičius yra $A_4^2 = 12$. Prie šio skaičiaus prijungę gretinius xx, yy, zz, uu, gauname 16 gretinių su pasikartojimais. **Atsakymas.** 12.

2 pavyzdys. Kiek skirtingų keturženklių skaičių galima užrašyti, panaudojant skaitmenis 3, 4, 5?

Sprendimas. $\overline{A}_3^4 = 3^4 = 81$. **Atsakymas.** 81.

3 pavyzdys. Kiek skirtingų dviženklių skaičių galima sudaryti iš skaitmenų 7, 8, 9, kai tas pats skaitmuo skaičiuje gali kartotis?

Sprendimas. $\overline{A}_3^2 = 3^2 = 9$. **Atsakymas.** 9.

Uždaviniai savarankiškam darbui

1. Krepšinio varžybose dalyvauja 10 komandų. Kiek yra būdų joms pasiskirstyti pirmąsias 3 vietas?

2. Daugiakampio viršūnes žymime skirtingomis didžiosiomis raidėmis. Kiek yra būdų sužymėti 25 – iomis lotynų abėcėlės raidėmis trikampio ir keturkampio viršūnes.

3. Studentas per 7 dienas turi išlaikyti 4 egzaminus. Per dieną jis laiko ne daugiau vieną egzaminą. Keliais būdais galima sudaryti tvarkaraštį?

4. Naujam disko klubo pavadinimui sukurti pasirinktos 7 skirtingos raidės. Kiek iš jų galima sugalvoti pavadinimų, kuriuos sudarytų 3 raidės (raidės gali kartotis)?

5. Siūlomi 8 žmonės gamyklos direktoriaus ir direktoriaus pavaduotojo pareigoms užimti. Kiek būdų jiems yra pasiskirstyti šiomis pareigomis?

6. Traukinį sudaro 9 vagonai. Kiek yra galimybių susodinti 4 žmones į skirtingus vagonus?

7. Onutė perka sau, sesutei ir broliukui po vieną balioną. Parduotuvėje yra 7 skirtingų formų balionai. Keliais būdais mergaitė gali nusipirkti skirtingų formų balionus?

8. Reikia nudažyti tris namus. Kiekvienam jų galima parinkti vieną iš 5 spalvų. Keliais skirtingais būdais tai galima padaryti? Kiek yra būdų nudažyti namus skirtingomis spalvomis?

9. Kiek dviženklių skaičių galima sudaryti iš skaitmenų 4, 6, 8, jei: 1) skaitmenys skaičiuje gali kartotis; 2) skaitmenys skaičiuje nesikartoja?

10. Kiek yra mažesnių už 1000 natūraliųjų skaičių, sudarytų naudojantis skaitmenimis 1, 2, 3, 4, 5?

11. Kiek yra mažesnių už 10000 natūraliųjų skaičių, sudarytų naudojantis skaitmenimis 5, 6, 7, 8, 9 ir neturinčių vienodų skaitmenų?

12. Iš skaičių 1, 3, 5, 7, 9 sudarykite skaičius, kuriuose būtų ne daugiau kaip 3 skaitmenys. Kiek tokių skaičių galima sudaryti, jei: 1) skaitmenys gali kartotis; 2) skaitmenys skaičiuje negali kartotis?

13. Kiek penkiaženklių skaičių galima sudaryti iš skaitmenų 1, 2, 4, 6, 7, 8, jei nė vienas skaitmuo sudarytame skaičiuje neturi kartotis? Kiek iš jų yra lyginių skaičių?

14. Į muziejų buvo atvežti 4 skirtingi senoviški krėslai. Pastate yra 7 laisvos sienos. Keliais būdais muziejaus darbuotojai gali sustatyti prie šių sienų, derinant prie interjero, po vieną krėslą?

15. Kiek galima sudaryti šešiaženklių skaičių, kurie dalijasi iš 5, jei: 1) skaičiuje skaitmenys negali kartotis; 2) skaitmenys gali kartotis?

16. Traukinių stočiai priklauso 6 atsarginiai keliai. Keliais būdais galima paskirstyti juose 4 traukinius?

17. Kiek yra skirtingų šešiaženklių telefono numerių, jei kiekviename numeryje nėra pasikartojančių skaitmenų?

18. Ligoninės chirurginiame skyriuje dirba 20 gydytojų. Keliais būdais iš jų galima suformuoti brigadą iš vieno vyriausiojo chirurgo ir 4 jo asistentų?

19. Vienos klasės mokiniai mokosi 11 dalykų. Kiekvieną dieną yra po 6 skirtingas pamokas. Kiek skirtingų tvarkaraščių vienai savaitės dienai galima sudaryti?

20. Kiek lyginių keturženklių skaičių su skirtingais skaitmenimis galima sudaryti iš skaičių 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ?

2.2. Kėliniai, kėliniai su pasikartojimais

Kėliniai iš n elementų yra gretiniai iš tų pačių n elementų po n. Kėlinių skaičius žymimas P_n.

Skirtingi kėliniai yra sudaryti iš tų pačių elementų ir vienas nuo kito skiriasi tik elementų išsidėstymo tvarka. Kėlinių iš n elementų skaičius apskaičiuojamas pagal formulę:

$$P_n = A_n^n = n(n-1)(n-2)\cdot \ldots \cdot 3\cdot 2\cdot 1 = n!.$$

1 pavyzdys. Duoti 3 elementai x, y, z. Sudarykime iš jų visus galimus kėlinius:

xyz xzy yxz

yzx zxy zyx

Gavome 6 kėlinius. Iš tikrųjų, pagal formulę

$P_3 = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$. **Atsakymas.** 6.

2 pavyzdys. Keleivinis traukinys turi 10 vagonų. Keliais būdais galima išdėstyti vagonus paruošiant traukinį?

$P_{10} = 10! = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 362880$ būdų.

Atsakymas. 362880.

3 pavyzdys. Kiek skirtingų trispalvių vėliavų su horizontaliomis juostomis galima padaryti kombinuojant mėlyną, baltą ir raudoną spalvas?

$P_3 = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ skirtingas vėliavas. **Atsakymas.** 6.

4 pavyzdys. Keliais būdais galima susodinti 4 žmones prie keturviečio stalo?

Sprendimas. Yra tiek susodinimo būdų, kiek galima sudaryti kėlinių iš 4 elementų:

$P_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24.$ **Atsakymas.** 24.

5 pavyzdys. Kiek galima sudaryti skirtingų penkiaženklių skaičių, kurie yra nedalūs iš 5, iš skaitmenų 1, 2, 3, 4, 5, jų nekartojant?

Sprendimas. Iš penkių skirtingų skaitmenų galima sudaryti P_5 penkiaženklius skaičius. Iš šio skaičiaus reikia atimti skaičius, kurie dalijasi iš 5. Tokių skaičių yra P_4. Vadinasi, ieškomųjų skaičių yra

$P_5 - P_4 = 5! - 4! = 4! \cdot 4 = 96.$ **Atsakymas.** 96.

6 pavyzdys. Į eilę reikia sustatyti 5 berniukus taip, kad Martynas ir Justinas stovėtų greta. Kiek yra galimybių tai padaryti?

Sprendimas. Greta sustoję Martynas ir Justinas gali būti laikomi vienu elementu, tada berniukus perstatyti yra $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ būdai. Be to, Martynas ir Justinas gali pasikeisti vietomis, todėl sustatyti berniukus į eilę yra $4! \cdot 2! = 48$ būdų. **Atsakymas.** 48.

7 pavyzdys. Studentas 6 savaites turi laikyti po egzaminą kas savaitę.Du iš šešių egzaminų yra matematikos egzaminai. Kiek yra būdų sudaryti egzaminų laikymo eilę, kad matematikos egzaminų netektų laikyti vieną po kito?

Sprendimas. Jei pirmasis matematikos egzaminas bus laikomas 1 arba 6 savaitę, tai antrajam matematikos egzaminui lieka 4 galimybės, nes vieną savaitę reikia praleisti. Jei pirmasis matematikos egzaminas laikomas 2 – 5 savaites, tai kitam egzaminui lieka 3 galimybės. Matematikos egzaminus galima išdėstyti $2 \cdot 4 + 4 \cdot 3 = 20$ būdų. Kitus egzaminus galima išdėstyti $4! = 24$ būdais. Egzaminų laikymo eilei sudaryti yra $20 \cdot 4! = 480$ galimybių. **Atsakymas.** 480.

Kėliniai su pasikartojimais.

Junginiai sudaryti iš n elementų $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ ir kurių pirmasis elementas a_1 pasikartoja k_1 kartų, antrasis elementas a_2 pasikartoja

k_2 kartų, elementas a_3 – k_3 kartų, ..., elementas a_n pasikartoja k_n kartų yra vadinami **kėliniais su pasikartojimais.**

Kėlinių su pasikartojimais iš n elementų a_1, a_2, ..., a_n skaičius randamas pagal formulę:

$$P_n(k_1, k_2, ..., k_n) = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot ... \cdot k_n!},$$

čia k_1 – elemento a_1 pasikartojimų skaičius;

čia k_2 – elemento a_2 pasikartojimų skaičius;

čia k_n – elemento a_n pasikartojimų skaičius.

Visada $k_1 + k_2 + ... + k_n = n$.

1 pavyzdys. Žinoma, kad elementas x pasikartoja 2 kartus, elementas y pasikartoja 3 kartus, elementas z pasikartoja 2 kartus. Iš šių elementų (įskaitant jų pasikartojimų skaičių) galima sudaryti įvairius kėlinius su pasikartojimais, pavyzdžiui, xxyyyzz, xyxyzyz, zyxyxzy. Kiekvienas toks kėlinys su pasikartojimais turi po 7 elementus: 2 + 3 + 2 = 7. Tokių kėlinių su pasikartojimais skaičius lygus

$$P_7(2,3,2) = \frac{7!}{2!3!2!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2} = 210.$$

Atsakymas. 210.

2 pavyzdys. Kiek kėlinių su pasikartojimais galima sudaryti iš žodžio “kalakutas” raidžių?

Sprendimas. Šiuo atveju turime 2 raides k, 3 raides a, 1 raidę l, 1 raidę u, 1 raidę t ir 1 raidę s; iš viso 9 raidės: 2 + 3 + 1 + 1 + 1 + 1 = 9. Pagal kėlinių su pasikartojimais skaičiaus formulę ieškomųjų kėlinių su pasikartojimais skaičius lygus:

$$P_9(2,3,1,1,1,1) = \frac{9!}{2!3!1!1!1!1!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1} = 30240.$$

Atsakymas. 30240.

Uždaviniai savarankiškam darbui

1. Kiek skirtingų servetėlių galima pasiūti kombinuojant raudonos, mėlynos, baltos ir geltonos spalvos audeklus?

2. Keliais būdais galima susodinti Joną, Petrą ir Antaną prie triviečio staliuko?

3. Kiek penkiaženklių skaičių galima sudaryti iš skaičių 1, 2, 3, 4, 5, kad nė vienas skaitmuo skaičiuje nesikartotų?

4. Keliais būdais 7 žmonės gali sustoti eilėje?

5. Keliais būdais galima sukabinti spintoje 6 sukneles?

6. Keliais būdais galima sužymėti keturkampio viršūnes, naudojant raides A, B, C, D?

7. Viešbutyje yra 8 kambariai. Keliais būdais galima juose apgyvendinti 8 žmones?

8. Žirgų lenktynėse dalyvauja 12 žirgų. Kiek galimybių jiems pasiskirstyti vietas, jei jokie du žirgai neužima tos pačios vietos?

9. Kiek galimybių sustatyti lentynoje 3 algebros vadovėlius, 2 geometrijos vadovėlius, 4 matematinės analizės vadovėlius?

10. Per 3 savaites Martynas turi apsilankyti pas 3 gydytojus. Kiek galimybių berniukas turi tai padaryti, jei kiekvieną savaitę jis gali eiti tik pas vieną gydytoją?

11. Viename bendrabučio kambaryje yra 5 lovos. Keliais būdais galima jas paskirstyti penkiems studentams, jei į lovą gali tilpti tik vienas žmogus?

12. Močiutė augina 6 triušius. Keliais būdais ji gali paskirstyti 6 anūkams prižiūrėti triušius, jei kiekvienas triušis gali turėti tik vieną šeimininką?

13. Kiek žodžių galima sudaryti iš žodžio „kupranugaris“ raidžių?

14. Keliais būdais galima eilutėje parašyti 6 pliusus ir 4 minusus?

15. Kiek skirtingų skaičių galima gauti perstatant skaitmenis skaičiuje 2233344455?

16. Keliais būdais galima susodinti 7 moksleivius, kad Jonas, Petras ir Antanas sėdėtų greta?

17. Keliais būdais galima lentynoje sudėti 7 knygas, jei kažkurios dvi knygos: 1) turi būti greta; 2) negali būti greta?

18. Į cirko areną išleidžiamos 4 juodosios ir 2 baltosios meškos. Kiek galimybių turi dresiruotojas jas sustatyti į eilę, kad baltosios meškos būtų greta?

19. Kiek galima sudaryti žodžių iš žodžio „kampas“ raidžių? Žodžių, kuriuose „a“ nėra viena šalia kitos?

20. 27 skirtingų autorių knygos ir 3 vieno autoriaus knygos sudėtos vienoje lentynoje. Keliais būdais galima perstatyti knygas, kad vieno autoriaus knygos būtų greta?

2.3. Deriniai, deriniai su pasikartojimais

Deriniai iš n elementų po k elementų yra tokie junginiai, kurių kiekvienas turi k elementų, parinktų iš duotųjų n elementų, ir kurie vienas nuo kito skiriasi tik pačiais elementais.

Pavyzdžiui, abc, bac, cab yra vienas ir tas pats derinys; xy ir yx yra vienas ir tas pats derinys.

Derinių iš n elementų po k skaičius žymimas C_n^k ir apskaičiuojamas pagal formules:

$$C_n^k = \frac{n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-(k-1))}{k!}.$$

Pavyzdžiui,

$$C_6^4 = \frac{6(6-1)(6-2)(6-(4-1))}{4!} = \frac{6(6-1)(6-2)(6-3)}{4!} = \frac{6\cdot5\cdot4\cdot3}{1\cdot2\cdot3\cdot4} = 15.$$

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Pavyzdžiui,

$$C_6^4 = \frac{6!}{4!(6-4)!} = \frac{6!}{4!\cdot 2!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 1\cdot 2} = 15.$$

Susitarta laikyti, kad $C_n^0 = 1$ ir $C_0^0 = 1$.

1 pavyzdys. Duoti keturi elementai x, y, z, u. Iš jų galima sudaryti tokius derinius po 2 elementus kiekviename:

xu, yz, zu, xy, xz, yu.

Pagal derinių skaičiaus formulę

$$C_4^2 = \frac{4\cdot(4-1)}{2!} = \frac{4\cdot 3}{1\cdot 2} = 6 \quad \text{arba} \quad C_4^2 = \frac{4!}{2!2!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 1\cdot 2} = 6.$$

Iš tų pačių elementų x, y, z, u galima sudaryti 4 derinius po 3 elementus:

xyz, xyu, yzu, xzu.

Šiuo atveju:

$$C_4^3 = \frac{4\cdot(4-1)(4-2)}{3!} = \frac{4\cdot 3\cdot 2}{1\cdot 2\cdot 3} = 4$$

arba

$$C_4^3 = \frac{4!}{3!(4-3)!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 1} = 4.$$

Atsakymas. 4.

2 pavyzdys. Keliais būdais galima išsirinkti 3 budėtojus iš 20 žmonių grupės?

Sprendimas. Kadangi skirtingos budėtojų grupės (kiekvienoje grupėje yra po 3 budėtojus) viena nuo kitos turi skirtis bent vienu žmogumi, tai ieškomas skaičius yra:

$$C_{20}^3 = \frac{20(20-1)(20-2)}{3!} = \frac{20\cdot 19\cdot 18}{1\cdot 2\cdot 3} = 1140 \text{ būdų.}$$

Pagal antrąją formulę

$$C_{20}^3 = \frac{20!}{3!(20-3)!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots\cdot 18\cdot 19\cdot 20}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots\cdot 15\cdot 16\cdot 17} = \frac{18\cdot 19\cdot 20}{1\cdot 2\cdot 3} = 1140.$$

Atsakymas. 1140.

3 pavyzdys. Kiek skirtingų stygų galima nubrėžti per 6 apskritimo taškus?

Sprendimas. Skirtingų stygų galima nubrėžti tiek, kiek galima sudaryti derinių iš 6 elementų po 2, nes styga vienareikšmiškai nusakoma dviem apskritimo taškais ir elementų išsidėstymo tvarka čia neturi reikšmės. Pavyzdžiui, AB ir BA – viena ir ta pati styga. Taigi galima išvesti $C_6^2 = \frac{6!}{2!4!} = 15$ skirtingų stygų. **Atsakymas.** 15 skirtingų stygų.

4 pavyzdys. Kiek įstrižainių turi iškilasis dešimtkampis?

Sprendimas. Daugiakampio įstrižainių skaičius randamas iš formulės

$C_n^k - n$, kur n kampų skaičius.

Dešimtkampio viršūnes galima sujungti $C_{10}^2 = \frac{10!}{2! \cdot 8!} = \frac{9 \cdot 10}{2} = 45$ tiesėmis, 10 iš jų yra daugiakampio kraštinės, todėl įstrižainių yra $45 - 10 = 35$. **Atsakymas.** 35.

5 pavyzdys. Klasėje yra 14 mergaičių ir 8 berniukai. Keliais būdais galima išrinkti 5 moksleivių delegaciją, į kurią įeitų 3 mergaitės ir 2 berniukai?

Sprendimas. Mergaites galima pasirinkti C_{14}^3 būdais, o berniukus – C_8^2 būdais. Remiantis kombinatorine daugybos taisykle, skirtingų delegacijų skaičius lygus

$$C_{14}^3 C_8^2 = \frac{14(14-1)(14-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{8(8-1)}{1 \cdot 2} = \frac{14 \cdot 13 \cdot 12}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{8 \cdot 7}{1 \cdot 2} = 10192.$$

Atsakymas. 10192.

6 pavyzdys. Anglai šeimoje naujagimiui gali suteikti ne daugiau kaip 3 vardus (tvarka nesvarbi). Kiek skirtingų būdų yra parinkti naujagimiui vardus, jei juos reikia rinkti iš 13 vardų?

Sprendimas. Vieną vardą parinkti yra 13 galimybių. Du vardus parinkti yra $C_{13}^2 = \frac{13!}{2!11!} = \frac{12 \cdot 13}{2} = 78$ galimybės. Tris vardus parinkti yra

$C_{13}^3 = \frac{13!}{3!10!} = \frac{11 \cdot 12 \cdot 13}{2 \cdot 3} = 286$ galimybės. Naujagimiui galima parinkti arba vieną, arba du, arba tris vardus, todėl pagal kombinatorikos sudėties taisyklę parinkti vardą yra $13 + 78 + 286 = 377$ galimybės. **Atsakymas.** 377.

7 pavyzdys. 8 turistus reikia apgyvendinti dviejuose viešbučio kambariuose taip, kad kiekviename būtų ne mažiau kaip 3 žmonės. Keliais skirtingais būdais tai galima padaryti?

Sprendimas. Pirmame kambaryje galima apgyvendinti tris turistus $C_8^3 = \frac{8!}{3!5!} = \frac{6 \cdot 7 \cdot 8}{2 \cdot 3} = 56$ būdais, o keturis turistus $C_8^4 = \frac{8!}{4!4!} = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{2 \cdot 3 \cdot 4} = 70$ būdų, penkis turistus – $C_8^5 = C_8^3 = 56$ būdais. Likusieji turistai kiekvienu atveju bus apgyvendinti antrajame kambaryje. Kambariuose galima apgyvendinti arba tris, arba keturis, arba penkis turistus, todėl paskirstyti galima $56 + 70 + 56 = 182$ būdais.

Atsakymas. 182.

8 pavyzdys. Iš 20 dėžėje esančių bilietų 5 yra laimingi. Kiek galimybių traukiant 7 bilietus ištraukti 2 laimingus?

Sprendimas. Iš 5 laimingų bilietų ištraukti 2 yra $C_5^2 = \frac{5!}{2!3!} = \frac{4 \cdot 5}{2} = 10$ galimybių. Nelaimingų bilietų liko $20 - 5 = 15$. Iš jų reikia ištraukti 5 bilietus ($7 - 2 = 5$) yra $C_{15}^5 = \frac{15!}{5!10!} = \frac{11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 3003$ galimybės. Traukiant 7 bilietus, ištraukti 2 laimingus pagal sandaugos taisyklę yra $3003 \cdot 10 = 30030$ galimybės. **Atsakymas.** 30030.

9 pavyzdys. Iš natūraliųjų skaičių sudaromi šešiaženkliai skaičiai, turintys tris lyginius ir tris nelyginius skaitmenis, be to, skaitmenys skaičiuje nesikartoja. Kiek galima sudaryti tokių skaičių?

Sprendimas. Iš skaičių 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 nelyginių skaičių yra 5, o lyginių 4, todėl paimti po 3 skaitmenis galima $C_5^3 \cdot C_4^3 = 40$ būdų.

Kiekviename šešiaženkliame skaičiuje keisdami skaitmenis vietomis gauname $6! = 720$ variantų. Šešiaženklių skaičių pagal daugybos taisyklę yra $40 \cdot 720 = 28800$. **Atsakymas.** 28800.

10 pavyzdys. Iš 20 klasės mokinių į konferenciją reikia pasiųsti 5 mokinius. Kiek yra galimybių išrinkti 5 mokinius, jei klasės seniūnas ir du jo pavaduotojai negali vienu metu išvykti?

Sprendimas. ***1 būdas.*** 5 mokinius parinkti iš 20 – ties yra C_{20}^5 galimybių. Iš to skaičiaus reikia atmesti tuos variantus, kada seniūnas ir du jo pavaduotojai patenka į išeinančiųjų į konferenciją penkių mokinių grupę. Jeigu seniūnas ir du jo pavaduotojai įeina į penkių mokinių grupę, tai likusius du reikia išrinkti iš 17 mokinių, o tai galima padaryti C_{17}^2 būdais. Vadinasi, pasiųsti į konferenciją mokinius yra

$$C_{20}^5 - C_{17}^2 = \frac{20!}{5!15!} - \frac{17!}{2!15!} = \frac{17!}{2!15!}\left(\frac{18 \cdot 19 \cdot 20}{3 \cdot 4 \cdot 5} - 1\right) = \frac{16 \cdot 17}{2} \cdot 113 = 15368$$

galimybės.

2 būdas. Kadangi seniūnas ir du jo pavaduotojai kartu negali išvykti į konferenciją, tai galima pasiųsti 4 moksleivius iš 17, o vieną iš tų trijų arba 3 moksleivius iš 17, o du iš tų trijų, arba visus 5 iš 17 moksleivių. Vadinasi, yra $C_{17}^4 \cdot C_3^1 + C_{17}^3 \cdot C_3^2 + C_{17}^5 = 15368$ galimybės.

Atsakymas. 15368.

11 pavyzdys. Šokių ratelį lanko 7 mergaitės ir 5 berniukai. Keliais būdais iš jų galima sudaryti 4 šokėjų poras?

Sprendimas. ***1 būdas.*** 4 mergaites galima parinkti C_7^4 būdų. Kai mergaitės jau parinktos, yra svarbi berniukų parinkimo tvarka, todėl juos galima parinkti A_5^4 būdų. Remiantis kombinatorine daugybos taisykle, 4 šokėjų poroms sudaryti yra $C_7^4 \cdot A_5^4 = \frac{7!}{4!3!} \cdot \frac{5!}{1!} = 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 4 \cdot 5 = 4200$ būdų.

2 būdas. Galima iš pradžių C_5^4 būdais parinkti 4 berniukus. Po to svarbi bus mergaičių parinkimo tvarka, todėl jas galėsime parinkti A_7^4 būdais. Vadinasi, 4 šokėjų poras galima sudaryti

$$C_5^4 \cdot A_7^4 = \frac{5!}{4!} \cdot \frac{7!}{3!} = 5 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 4200 \text{ būdų.}$$

3 būdas. Mergaites galima parinkti C_7^4 būdais, o berniukus C_5^4 būdais ir poras galima sukeisti vietomis, todėl galimybių yra $4!C_7^4 \cdot C_5^4 = 4200$.

Atsakymas. 4200.

12 pavyzdys. Iš 36 kortų kaladės, kurioje yra 4 tūzai, ištrauktos 6 kortos. Keliais atvejais taro jų bus: 1) vienas tūzas; 2) bent vienas tūzas; 3) du tūzai; 4) bent du tūzai; 5) trys tūzai; 6) keturi tūzai?

Sprendimas.

1) Vieną tūzą galima pasirinkti C_4^1 būdais. Dar reikia parinkti 5 kortas, tarp kurių nebūtų nė vieno tūzo. Jas galima parinkti C_{32}^5 būdų. Remiantis kombinatorine daugybos taisykle, vienas tūzas bus:

$$C_4^1 \cdot C_{32}^5 = \frac{4!}{3!} \cdot \frac{32!}{5! \cdot 27!} = 4 \cdot \frac{28 \cdot 29 \cdot 30 \cdot 31 \cdot 32}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 805504 \text{ atvejais.}$$

2) 6 kortoms iš 36 paimti yra C_{36}^6 būdų. Iš šio skaičiaus reikia atimti variantų skaičių, kai nėra nė vieno tūzo, t.y. C_{32}^6. Vadinasi, bent vienas tūzas iš 6 bus $C_{36}^6 - C_{32}^6 = \frac{36!}{6! \cdot 30!} - \frac{32!}{6! \cdot 26!} = 1041600$ atvejais.

3) 2 tūzams parinkti yra C_4^2 būdų. Trūkstamas 4 kortas galima parinkti C_{32}^4 būdų. Du tūzai bus:

$$C_4^2 \cdot C_{32}^4 = \frac{4!}{2! \cdot 2!} \cdot \frac{32!}{4! \cdot 28!} = \frac{3 \cdot 4}{2} \cdot \frac{29 \cdot 30 \cdot 31 \cdot 32}{2 \cdot 3 \cdot 4} = 215760 \text{ atvejais}$$

4) 6 kortas iš 36 galima parinkti C_{36}^{6} būdų. Iš šio skaičiaus reikia atimti skaičių variantų, kai nėra nė vieno tūzo, t.y. C_{32}^{6}, ir atimti skaičių variantų, kai yra tik vienas tūzas, t.y. $C_{4}^{1} \cdot C_{32}^{5}$. Vadinasi, iš 6 kortų bus bent du tūzai $C_{36}^{6} - C_{32}^{6} - C_{4}^{1} \cdot C_{32}^{5} = 236096$ atvejais.

5) Trys tūzai bus $C_{4}^{3} \cdot C_{32}^{3} = \frac{4!}{3!} \cdot \frac{32!}{3!\,29!} = 19840$ atvejais.

6) Keturi tūzai iš 6 paimtų kortų bus $C_{4}^{4} \cdot C_{32}^{2} = \frac{32!}{2!\,30!} = 496$ atvejais.

Atsakymas. 1) 805504; 2) 1041600; 3) 215760; 4) 236096; 5) 19840; 6) 496.

Skaičių C_{n}^{k} savybės:

1. $C_{n}^{k} = C_{n}^{n-k}$.

Šią formulę patogu taikyti derinių skaičiui apskaičiuoti, kai $k > \frac{n}{2}$.

Pavyzdžiui, $C_{100}^{97} = C_{100}^{100-97} = C_{100}^{3} = \frac{100 \cdot 99 \cdot 98}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 161700$.

2. $C_{n}^{k} = C_{n-1}^{k} + C_{n-1}^{k-1}$; $k < n$.

Pavyzdžiui, $C_{5}^{3} = C_{4}^{3} + C_{4}^{2}$; $C_{4}^{2} = C_{3}^{2} + C_{3}^{1}$.

3. $C_{n}^{0} + C_{n}^{1} + \ldots + C_{n}^{n} = 2^{n}$.

Pavyzdžiui,

$$C_{5}^{0} + C_{5}^{1} + C_{5}^{2} + C_{5}^{3} + C_{5}^{4} + C_{5}^{5} = 1 + 5 + 10 + 10 + 5 + 1 = 32 = 2^{5}.$$

Ryšys tarp gretinių iš n elementų po k skaičius A_{n}^{k} ir derinių iš n elementų po k skaičius C_{n}^{k} nusakomas formule:

$$A_{n}^{k} = k!\,C_{n}^{k}.$$

Pavyzdžiui, $A_7^4 = 4! \cdot C_7^4$, t.y. $A_7^4 = \frac{7!}{3!} = 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7$ ir

$$4! \cdot C_7^4 = 4! \cdot \frac{7!}{4! \cdot 3!} = \frac{7!}{3!} = 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7.$$

Deriniai su pasikartojimais. Deriniai iš n elementų po k elementų su pasikartojimais apskaičiuojami pagal formules:

$$\boxed{\overline{C}_n^k = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}.}$$

Pavyzdžiui, $\overline{C}_4^7 = \frac{(4+7-1)!}{7!(4-1)!} = \frac{10!}{7! \cdot 3!} = \frac{8 \cdot 9 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 120$,

arba $\boxed{\overline{C}_n^k = C_{n+k-1}^k.}$

Pavyzdžiui, $\overline{C}_4^7 = C_{4+7-1}^7 = C_{10}^7 = \frac{10!}{7! \cdot 3!} = 120.$

Sprendžiant uždavinius patogiau naudotis antrąja formule.

1 pavyzdys. Parduotuvėje yra 5 skirtingų spalvų pieštukų. Keliais skirtingais būdais galima nusipirkti 8 pieštukų rinkinį?

Sprendimas.

$$\overline{C}_8^8 = C_{8+5-1}^8 = C_{12}^8 = \frac{12!}{8!(12-8)!} = \frac{12!}{8!\,4!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 495.$$

Atsakymas. 495.

2 pavyzdys. Gėlių kioske yra 4 skirtingų rūšių gėlių. Keliais skirtingais būdais galima nusipirkti 5 gėles puokštei sudaryti?

Sprendimas.

$$\overline{C}_4^5 = C_{5+4-1}^5 = C_8^5 = C_8^{8-5} = C_8^3 = \frac{8(8-1)(8-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 56.$$

Atsakymas. 56.

Uždaviniai savarankiškam darbui

1. Keliais būdais skaitytojas gali išsirinkti 3 knygas iš 5, jei knygų paėmimo tvarka nesvarbi?

2. Iš keturių gabiausių klasės matematikų reikia išrinkti tris dalyvauti mokyklos matematikų olimpiadoje. Keliais būdais tai galima padaryti?

3. Kioske yra 6 rūšių kramtomosios gumos. Keliais būdais galima nusipirkti 10 skirtingų rūšių kramtomosios gumos?

4. Bufete parduodamos bandelės: 4 rūšių su kremu, 2 rūšių su mėsa, 3 rūšių su varške ir 2 rūšių su obuoliais. Keliais būdais galima nusipirkti: 1) bandelę; 2) dvi bet kokias bandeles; 3) nedaugiau kaip dvi bandeles; 4) 5 rūšių bandeles su varške ir 2 rūšių su kremu; 5) 2 rūšių su varške arba 4 rūšių bandeles su obuoliais?

5. Jonukas pritrūko pašto ženklų laiškams. Parduotuvėje yra 4 skirtingų vienodos vertės pašto ženklų. Keliais skirtingais būdais jis gali nusipirkti 6 pašto ženklus?

6. Paukščių turguje parduodamos 8 skirtingų veislių vištos. Keliais būdais galima nusipirkti 10 skirtingų vištų?

7. Parodoje dalyvauja 6 "čiau – čiau" veislės šuniukai, 4 rotveileriai ir 5 pudeliai. Kiek galimybių turi komisija, kuriai reikia išrinkti 2 "čiau – čiau" veislės šuniukus, 1 rotveilerį ir 2 pudelius?

8. Parduotuvėje yra 10 rūšių automatinių skalbimo mašinų. Keliais būdais pirkėjas gali nusipirkti: 1) 3 skirtingų rūšių skalbimo mašinas; 2) 6 skirtingų rūšių skalbimo mašinas?

9. Parduotuvėje yra 5 rūšių lietuviškų ir 3 rūšių importinių gaiviųjų gėrimų. Keliais būdais pirkėjas gali nusipirkti: 1) 2 rūšių gėrimų; 2) 3 rūšių lietuviškų ir 2 rūšių importinių gėrimų?

10. Uždaroje akcinėje bendrovėje dirba 28 tarnautojai, iš jų 16 moterų ir 12 vyrų. Komandiruotei į Ispaniją reikia sudaryti 4 moterų ir 2 vyrų delegaciją. Keliais būdais vadovas gali pasirinkti tarnautojus, sudarydamas šią delegaciją?

11. Madingų drabužių parduotuvėje gautos 8 skirtingos naujų modelių suknelės. Keliais būdais moteris galės išsirinkti 3 skirtingas sukneles?

12. Kompiuterinių žaidimų salone yra 12 skirtingų žaidimo aparatų. Keliais būdais Mindaugas galės pažaisti, turėdamas pinigų išbandyti 14 žaidimo aparatų?

13. 10 darbininkų reikia suskirstyti į dvi brigadas taip, kad kiekvienoje brigadoje būtų ne mažiau kaip 4 žmonės. Keliais skirtingais būdais tai galima padaryti?

14. Iš 7 rožių ir 5 narcizų žiedų reikia sudaryti puokštę, kurioje būtų 2 rožės ir 3 narcizai. Keliais būdais tai galima padaryti ?

15. 36 kortų kaladėje yra 4 tūzai. Keliais būdais galima padalinti 10 kortų taip, kad tarp jų būtų 3 tūzai ?

16. Žemės ūkio bandymų stotis ūkininkams rekomenduoja 4 veislių miežių ir 5 veislių žirnių sėklas. Kiek galimybių pasirinkti turi ūkininkas, jei pirks: 1) dviejų veislių miežių sėklas; 2) trijų veislių miežių sėklas; 3) dviejų veislių miežių ir dviejų veislių žirnių sėklas?

17. Septintos klasės mokiniai gali pasirinkti kai kuriuos mokomuosius dalykus. Mažos mokyklos septintokams pasirinkti siūlomi 3 dalykai savo mokykloje ir dar 5 dalykai gretimoje didesnėje mokykloje. Kiek galimybių pasirinkti turi septintokas, jei jam leidžiama pasirinkti: 1) vieną dalyką; 2) du dalykus; 3) tris dalykus; 4) ne daugiau kaip du dalykus; 5) ne daugiau kaip tris dalykus; 6) keturis dalykus?

18. Vienas mokinys turi 5 skirtingas knygas, o kitas – 9. Kiek galimybių pasikeisti: 1) po vieną knygą; 2) po dvi knygas?

19. Turguje parduodami sodinukai: 5 rūšių obelaitės, 4 – kriaušės, 3 – serbentai, 6 – slyvos, 7 – agrastai. Keliais būdais sodininkas gali nusipirkti: 1) bent vienos rūšies sodinuką; 2) kiekvienos rūšies po vieną sodinuką; 3) 2 rūšių kriaušės, 3 rūšių slyvos ir 4 rūšių obelaičių sodinukus; 4) dviejų vaismedžių sodinukus?

20. Ledo rutulio komandoje yra 3 puolėjai, 2 gynėjai ir 1 vartininkas. Kiek skirtingų komandų gali sudaryti treneris, jeigu jis turi 6 puolėjus,4 gynėjus ir 2 vartininkus?

2.4. Įvairūs uždaviniai

1. Automobilio numerį sudaro šeši ženklai: pirmieji trys – lotynų abėcėlės raidės, kiti trys – skaitmenys. Kiek galima sudaryti skirtingų automobilių numerių, jei ženklinimui vartojamos 23 raidės ir atsisakoma skaitmenų rinkinio 000?

2. Kavinėje galima pasirinkti blynus su grietine, uogiene ir cukrumi, dviejų rūšių sumuštinių: su sūriu ir dešra – ir gėrimus: žolelių arbatą, mineralinį vandenį, kisielių ir limonadą. Birutė nori pirkti blynus su padažu ir gėrimą, o Onutė pirks sumuštinį ir stiklinę gėrimo. Kiek galimybių pasirinkti turi mergaitės?

3. Valė turi žalią, rudą, juodą sijonėlius ir geltoną, pilką, oranžinę, baltą palaidines. Kiek dienų iš eilės mergaitė gali skirtingai rengtis?

4. Šachmatų lentoje yra 64 langeliai. Kiek galimybių yra šachmatų lentoje nurodyti: 1) 2 bet kokius langelius; 2) 2 skirtingų spalvų langelius; 3) 2 vienodų spalvų langelius?

5. Grupėje 9 žmonės. Kiek galima sudaryti pogrupių, kad į kiekvieną patektų ne mažiau kaip 2 žmonės?

6. Įrodykite, kad skaičius žodžių, sudarytų iš 3 žodžio „trapecijos“ raidžių, lygus visų galimų žodžių, sudarytų iš žodžio „elipsė“ raidžių, skaičiui.

7. Pardavimui yra ruošiami 4 gyvenamieji namai, 6 parduotuvės ir 5 viešbučiai. Keliais būdais galima parduoti: 1) 3 pastatus; 2) 3 skirtingus pastatus?

8. „Mis – 99“ rinkimuose dalyvauja 10 merginų. 1. Keliais būdais 7 merginos gali patekti į pusfinalį? 2. Keliais būdais žiuri gali atrinkti 5 merginas į finalą? 3. Kiek galimybių yra merginoms, patekusioms į finalą, pasiskirstyti pirmąsias tris vietas?

9. Šokyje solo partijas gali atlikti ne daugiau, kaip 3 šokėjai. Keliais būdais galima sukurti šokį, jei solistus reikia rinktis iš 12 šokėjų?

10. Prieš šventes Mindaugas turi nupirkti saldumynų. Parduotuvėje yra 5 rūšių šokoladinių ir 6 rūšių karamelinių saldainių, 4 rūšių pyrago bei 5 rūšių sausainių. Kiek pasirinkimo būdų, jei norima nupirkti: 1) kiekvienos rūšies saldumynų; 2) 2 rūšių saldainių; 3) 2 rūšių šokoladinių saldainių ir 3 rūšių sausainių; 4) 6 rūšių šokoladinių, 2 rūšių karamelinių saldainių, vienos rūšies pyrago ir 2 rūšių sausainių?

11. Marytei mama liepė lankyti vieną sporto sekciją arba du būrelius. Mokykloje yra plaukimo, meninės gimnastikos, aerobikos, krepšinio, teniso sekcijos, o jaunimo ir moksleivių rūmuose – 6 būreliai, kuriuos gali lankyti mergaitės. Kiek galimybių pasirinkti turi Marytė?

12. Turistų stovykloje organizuojamos varžybos. Iš klasės 5 mokiniai sutinka dalyvauti tik orientavimosi varžybose, 7 – tik plaukimo, 6 – tik bėgimo ir dar 4 berniukai – klasės stipruoliai. Kiek skirtingų būdų galima sudaryti komandą, į kurią įeitų orientacininkas, 2 plaukikai, 3 bėgikai ir stipruolis? Kiek galimybių juos sustatyti į vieną eilę?

13. Iš 20 mokinių reikia sudaryti 3 brigadas taip, kad pirmoje būtų 3 mokiniai, antroje – 5, o trečioje – 12. Keliais būdais tai galima padaryti?

14. Treneris iš 8 mokinių atrinko į komandą 5 berniukus dalyvauti rungtynėse. Kiek galimybių yra sudaryti komandą?

15. 8 žmonės turi susėsti į du automobilius taip, kad kiekviename būtų bent po 3 žmones. Kiek yra galimybių tai padaryti?

16. Kiek žodžių galima sudaryti iš žodžio „iliuzija" raidžių? Kiek tokių žodžių, kuriuose iš eilės yra trys „i" raidės?

17. Turistų būrelis eina iš mokyklos prie ežero. Pakeliui jie nutarė aplankyti piliakalnį ir miško muziejų. Iš mokyklos į piliakalnį yra 4 keliai. Nuo piliakalnio į miško muziejų veda 6 skirtingi takeliai. Iš miško muziejaus prie ežero galima nueiti vienu iš 3 skirtingų takų. Kiek skirtingų maršruto pasirinkimo galimybių?

18. Miestelio parduotuvėje yra trijų gamyklų dviračių: Minsko gamybos 15 dviračių, Rygos gamybos 13 dviračių ir Šiaulių – 9 dviračiai. Kiek skirtingų būdų Jurgiukas gali išsirinkti dviratį?

19. Kiek lyginių triženklių skaičių galima sudaryti iš skaitmenų 1, 4, 5, 7?

20. Jonas perka sau, mamai ir seseriai po skirtingą šokoladą. Parduotuvėje yra 10 rūšių šokoladų. Keliais būdais Jonas gali nusipirkti šokoladus?

21. Kioske yra 6 skirtingų rūšių gėlių. Keliais būdais galima nusipirkti 9 gėles puokštei?

22. Autobuse „Latvija“ yra 7 sėdimos vietos. Kiek yra būdų paskirstyti 7 žmones į sėdimas vietas, jei vienoje vietoje sėdasi vienas žmogus?

23. Kelionių agentūra siūlo 10 skirtingų kelionių po Europą ir 4 keliones į Afriką. Kiek galimybių išvykti į kelionę? Kiek būdų pasirinkti kelionę į Europą ir į Afriką?

24. Kiek dviženklių ir šešiaženklių skaičių galima sudaryti iš skaitmenų 4, 6, 7, 8?

25. Kiek skirtingų žodžių galima gauti, perstatinėjant žodžių „kėliniai“ ir „atkarpa“ raides?

26. Televizijos programoje siūlomos 4 sporto laidos, 3 kino filmai, 2 publicistinės ir 4 muzikinės laidos. Kiek galimybių tėvui pasirinkti 2 sporto ir vieną publicistinę laidą? Kiek galimybių turi mama, norinti pažiūrėti bent vieną laidą, siūlomą programoje? Kiek galimybių turi sūnus, kuriam leidžiama žiūrėti sporto ir muzikinę laidas?

27. 20 skirtingų pavadinimų prekes reikia paskirstyti į 3 parduotuves taip, kad pirmoje būtų 8 skirtingų pavadinimų prekių, antroje – 7, o trečioje – 5. Keliais būdais galima paskirstyti ?

28. Per 4 savaites studentai turi išlaikyti 4 egzaminus, jų tarpe du matematikos egzaminus. Keliais būdais galima sudaryti egzaminų tvarkaraštį, kad laikant kiekvieną savaitę po egzaminą, matematikos egzaminų netektų laikyti vieną po kito?

29. Modelių agentūrai reikia naujų manekenių. Tam tikslui buvo surengtas konkursas, kuriame dalyvavo 6 brunetės, 7 blondinės, 4 šatenės ir 9 raudonų plaukų merginos. Keliais būdais modelių agentūra gali išsirinkti: 1) vieną merginą; 2) 3 brunetes, 2 raudonplaukes ir 6 blondines: 3) 2 skirtingos spalvos plaukų merginas?

30. Duoti skaičiai 3, 7, 1, 0, 2, 4. Kiek iš jų galima sudaryti: 1) dviženklių skaičių; 2) triženklių lyginių skaičių; 3) keturženklių skaičių, kurių skaitmenys nesikartoja; 4) triženklių su skirtingais skaitmenimis skaičių, kurių paskutinis skaitmuo 2; 5) keturženklių skaičių, kurie dalintųsi iš 5?

31. Klasėje yra 23 mokiniai. Šeši iš jų lanko bėgimo, o penki – šuolių treniruotes. Varžyboms reikia sudaryti 2 bėgikų ir 3 šuolininkų komandą. Kelias tokias komandas iš besitreniruojančių klasės mokinių galima sudaryti?

32. Iš 22 klasės mokinių keturi rengiasi dalyvauti šachmatų, o 7 – šaškių varžybose. Komandą reikia sudaryti iš 2 šachmatininkų ir 3 šaškininkų. Keliais būdais galima sudaryti komandą?

33. Iš 30 studentų 10 moka anglų kalbą, 12 – italų kalbą, 8 – ispanų kalbą, 5 – anglų ir italų kalbas, 3 – italų ir ispanų kalbas, o 2 moka visas tris kalbas. Keli studentai nemoka nė vienos iš tų trijų kalbų?

34. Klasėje yra 24 mokiniai. 8 iš jų lanko matematikos būrelį, 6 – chemijos, 10 – fizikos, 4 – matematikos ir fizikos, 3 – matematikos ir chemijos, 2 – fizikos ir chemijos. Keli mokiniai lanko bent vieną iš tų trijų būrelių?

35. Loterijos bilietai sunumeruoti nuo 1 iki 20. Iš jų galima išrinkti 3 bilietus taip, kad iš išrinktųjų bilietų bent vieno numeris būtų didesnis už 15?

36. Kiek yra būdų perstatyti skaičiaus 123589 skaitmenis vietomis, kad gautieji skaičiai būtų lyginiai?

37. Keliais būdais iš 20 žmonių galima išrinkti du teisėjus ir penkis vienos krepšinio varžybų komandos žaidėjus?

38. Jonukas turi 6 knygas, o Vytukas – 5. Kiek yra būdų pakeisti 3 vieno berniuko knygas į 3 kito berniuko knygas?

39. Kiek yra keturženklių skaičių, kurių kiekvienas paskesnis skaitmuo yra mažesnis už prieš jį esantį?

40. Šokių konkurse dalyvauja 6 mergaitės ir 4 berniukai. Keliais būdais iš jų galima sudaryti 3 šokėjų poras, jei porą turi sudaryti mergaitė ir berniukas?

41. 3 berniukai ir 5 mergaitės žaidžia kvadratą. Keliais būdais jie gali pasiskirstyti į dvi komandas po 4 žmones taip, kad kiekvienoje komandoje būtų bent po vieną berniuką?

42. Keliais būdais galima pasiųsti į sargybą 4 kareivius ir 2 karininkus, jeigu yra 20 kareivių ir 4 karininkai?

43. Kiek stygų galima išvesti per šešis per šešis vieno apskritimo taškus?

44. Iš 2 deputatų ir 8 teisininkų reikia sudaryti 5 žmonių komisiją. Keliais būdais galima sudaryti komisiją, jei į ją turi įeiti bent vienas deputatas?

45. Keliais būdais galima išdėstyti šachmatų lentoje 8 bokštus taip, kad vienas kito jie negalėtų kirsti?

46. Iš 32 kortų kaladės atsitiktinai ištraukiama 10 kortų. Kiek gali pasitaikyti įvykių, tokių, kad tarp 10 kortų būtų 1 būgnas, 2 čirvai, 3 pikai ir 4 kryžiai?

47. Laukinių žvėrių dresiruotojas turi išvesti į cirko areną 5 liūtus ir 4 tigrus. Keliais būdais jis gali sugrupuoti žvėris taip, kad 2 tigrai neitų vienas paskui kitą?

48. Studentų vakare dalyvauja 8 fakultetų studentai. Į ratelį iškviečiama dešimt studentų. Keliais būdais galima sudaryti ratelį, kuriame būtinai būtų po vieną matematikos ir filologijos fakulteto studentą?

49. Trys vaikinai ir dvi merginos nori įsidarbinti. Mieste yra 3 įmonės, kur reikalingi tik vyrai, 2 įmonės, kur reikalingos tik moterys ir 2 įmonės,

kur reikalingi ir vyrai, ir moterys. Keliais būdais 5 jaunuoliai gali įsidarbinti minėtose miesto įmonėse?

50. Studentų mokslinės draugijos posėdyje dalyvavo 52 studentai: po 13 studentų iš 4 fakultetų. Keliais būdais galima išrinkti posėdžio prezidiumą iš 4 asmenų taip, kad jame būtų 3 fakultetų studentai?

2.5. Lygtys ir nelygybės

$x! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (x-2) \cdot (x-1) \cdot x$.

$(x-1)! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (x-3) \cdot (x-2) \cdot (x-1)$.

$(x+1)! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (x-1) \cdot x \cdot (x+1)$.

$(x+2)! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (x-1) \cdot x \cdot (x+1) \cdot (x+2)$.

$(2x)! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2x-2) \cdot (2x-1) \cdot 2x$.

$(2x+1)! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2x-1) \cdot 2x \cdot (2x+1)$.

Lygčių ir nelygybių sprendimo pavyzdžiai

1. Išspręskite lygtis:

a) $C_n^{12} = C_n^8$.

Sprendimas. Pritaikę savybę $C_n^k = C_n^{n-k}$, gauname $C_n^{12} = C_n^{n-12}$, todėl

$C_n^{n-12} = C_n^8$,

$n - 12 = 8$, $n = 20$. **Atsakymas.** 20.

b) $C_x^{x-2} + 2x = 9$.

Sprendimas. Taikome formulę $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

$$C_x^{x-2} = \frac{x!}{(x-2)!(x-x+2)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (x-2)(x-1)x}{2! \cdot 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (x-2)} = \frac{x(x-1)}{2}.$$

$\dfrac{x(x-1)}{2} + 2x = 9$,

$x^2 - x + 4x - 18 = 0$,

$x^2 + 3x - 18 = 0,$

$x_1 = -6$ (nėra lygties šaknis, nes $x \in N$),

$x_2 = 3.$ **Atsakymas.** 3.

c) $\frac{C_{2x}^{x+1}}{C_{2x+1}^{x-1}} = \frac{2}{3}.$

Sprendimas.

1) $C_{2x}^{x+1} = \frac{(2x)!}{(x+1)!(2x-x-1)!} = \frac{(2x)!}{(x+1)!(x-1)!}.$

2) $C_{2x+1}^{x-1} = \frac{(2x+1)!}{(x-1)!(2x+1-x+1)!} = \frac{(2x+1)!}{(x-1)!(x+2)!}.$

3) $\frac{(2x)!}{(x+1)!(x-1)!} \cdot \frac{(x-1)!(x+2)!}{(2x+1)!} = \frac{(2x)!(x+2)!}{(x+1)!(2x+1)!} =$

$= \frac{(1 \cdot 2 \cdot ... \cdot 2x) \cdot (1 \cdot 2 \cdot ... \cdot (x+1) \cdot (x+2))}{(1 \cdot 2 \cdot ... \cdot (x+1)) \cdot (1 \cdot 2 \cdot ... \cdot 2x \cdot (2x+1))} = \frac{x+2}{2x+1}$

Sprendžiame lygtį

$\frac{x+2}{2x+1} = \frac{2}{3} \quad / \cdot 2x + 1 \neq 0$

$x \neq -\frac{1}{2}$

$3(x + 2) = 2(2x + 1)$

$3x + 6 = 4x + 2$

$-x = -4$

$x = 4.$ **Atsakymas.** 4.

d) $A_{x+1}^{3} + C_{x+1}^{x-1} = 14(x+1).$

Sprendimas.

1) $A_{x+1}^{3} = \frac{(x+1)!}{(x+1-3)!} = \frac{(x+1)!}{(x-2)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot ... \cdot (x-2) \cdot (x-1) \cdot x \cdot (x+1)}{1 \cdot 2 \cdot ... \cdot (x-2)} =$

$= (x - 1) \cdot x \cdot (x + 1).$

2) $C_{x+1}^{x-1} = \frac{(x+1)!}{(x-1)!(x+1-x+1)!} = \frac{(x+1)!}{2!(x-1)!} =$

$$=\frac{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(x-1)\cdot x\cdot(x+1)}{2\cdot(1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(x-1))}=\frac{x\cdot(x+1)}{2}.$$

$$(x-1)\cdot x\cdot(x+1)+\frac{x\cdot(x+1)}{2}-14(x+1)=0 \;\Big/ :\; x+1\neq 0$$
$$x\neq -1$$

$$2x^2-2x+x-28=0$$

$$2x^2-x-28=0$$

$$D=1+8\cdot 28=225=15^2$$

$x=\dfrac{1\pm 15}{2}$; $\quad x_1=4$; $\quad x_2=-3{,}5$ (nėra lygties šaknis).

Atsakymas. 4.

2. Išspręskite nelygybę $C_{x-1}^4-C_{x-1}^3-\frac{5}{4}A_{x-2}^2<0$.

Sprendimas.

1) $$C_{x-1}^4=\frac{(x-1)!}{4!(x-5)!}=\frac{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(x-5)\cdot(x-4)\cdot(x-3)\cdot(x-2)\cdot(x-1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot(1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(x-5))}=$$

$$=\frac{(x-4)(x-3)(x-2)(x-1)}{24}.$$

2) $$C_{x-1}^3=\frac{(x-1)!}{3!(x-4)!}=\frac{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(x-4)\cdot(x-3)\cdot(x-2)\cdot(x-1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot(1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(x-4))}=$$

$$=\frac{(x-3)(x-2)(x-1)}{6}.$$

3) $$A_{x-2}^2=\frac{(x-2)!}{(x-4)!}=\frac{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(x-4)\cdot(x-3)\cdot(x-2)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(x-4)}=(x-3)(x-2).$$

$$\frac{(x-4)(x-3)(x-2)(x-1)}{24}-\frac{(x-3)(x-2)(x-1)}{6}-\frac{5(x-3)(x-2)}{4}<0 \;\Big/\cdot 24$$

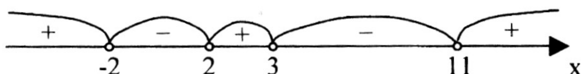
$$(x-3)(x-2)((x-4)(x-1)-4(x-1)-30)<0$$

$$(x-3)(x-2)(x^2-5x+4-4x+4-30)<0$$

$$(x-3)(x-2)(x^2-9x-22)<0$$

$$(x-3)(x-2)(x-11)(x+2)<0$$

Nelygybę sprendžiame intervalų metodu.



Kadangi $x \in N$ ir $x \neq 1$, $x \neq 4$ (C_n^k, $k < n$ ir $n \in N$), todėl nelygybės sprendiniai yra 5, 6, 7, 8, 9, 10. **Atsakymas.** 5, 6, 7, 8, 9, 10.

3. Kiek teigiamų narių turi seka (x_n), jei $x_n = \frac{195}{4P_n} - \frac{A_{n+3}^3}{P_{n+1}}$?

Sprendimas.

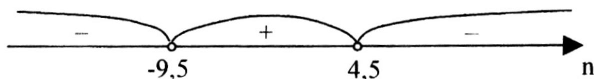
1) $A_{n+3}^3 = \frac{(n+3)!}{(n+3-3)!} = \frac{(n+3)!}{n!}$.

2) $$\frac{\frac{(n+3)!}{n!}}{(n+1)!} = \frac{(n+3)!}{n!(n+1)!} = \frac{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot (n+1)\cdot (n+2)\cdot (n+3)}{n!\cdot 1\cdot 2\cdot \ldots \cdot (n+1)} =$$
$$= \frac{(n+2)\cdot (n+3)}{n!}.$$

3) $$\frac{195}{4n!} - \frac{(n+2)\cdot (n+3)}{n!} = \frac{195 - 4(n^2+5n+6)}{4n!} =$$
$$= \frac{-4n^2 - 20n - 24 + 195}{4n!} = \frac{-(4n^2+20n-171)}{4n!} =$$
$$= \frac{-4(n+9,5)(n-4,5)}{4n!} = \frac{-(n+9,5)(n-4,5)}{n!}.$$

Pagal sąlygą $x_n > 0$, todėl $\frac{-(n+9,5)(n-4,5)}{n!} > 0$.

Kadangi natūraliųjų skaičių faktorialas turi būti teigiamas, lieka išspręsti intervalų metodu nelygybę $-(n+9,5)(n-4,5) > 0$.



Intervale (-9,5; 4,5) teigiami natūralieji skaičiai yra 1, 2, 3, 4. Todėl seka (x_n) turi keturis teigiamus narius.

Atsakymas. 4.

4. Sudarykite lygtis ir jas išspręskite.

1) Raskite daugiakampio, turinčio 14 įstrižainių, kraštinių skaičių.

Sprendimas. Įstrižainių skaičius apskaičiuojamas pagal formulę $C_n^2 - n$, kur n – kraštinių skaičius, todėl galima sudaryti lygtį $C_n^2 - n = 14$.

$$C_n^2 = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot ... \cdot (n-2)(n-1)n}{2 \cdot (1 \cdot 2 \cdot ... \cdot (n-2))} = \frac{(n-1)n}{2}.$$

$$\frac{n^2 - n}{2} - n = 14 \;/ \cdot 2$$

$$n^2 - 3n - 28 = 0$$

$n_1 = 7$, $n_2 = -4$ (nėra lygties šaknis, nes $n \in N$).

Atsakymas. 7.

2) Kalėdų proga klasės moksleiviai apsikeitė 132 dovanėlėmis. Kiekvienas moksleivis įteikė dovanėlę kiekvienam savo klasės draugui. Kiek moksleivių yra klasėje?

Sprendimas. Tarkime, kad klasėje yra n mokinių, tada pagal gretinių formulę turime $A_n^2 = 132$.

$$A_n^2 = \frac{n!}{(n-2)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot ... \cdot (n-2)(n-1) \cdot n}{1 \cdot 2 \cdot ... \cdot (n-2)} = (n-1) \cdot n.$$

Sprendžiame lygtį

$n(n - 1) = 132$,

$n^2 - n - 132 = 0$,

$n_1 = 12$, $n_2 = -11$ (netinka, nes $n \in N$).

Atsakymas. 12.

3) Šachmatų turnyro kiekvienas dalyvis sužaidė po vieną partiją su visais kitais dalyviais. Iš viso sužaista 210 partijų. Kiek šachmatininkų dalyvavo turnyre?

Sprendimas. Šachmatininkų skaičių pažymime n, tada pagal derinių formulę turime $C_n^2 = 210$. Apskaičiuojame

$$C_n^2 = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot (n-2)(n-1)\cdot n}{2\cdot 1\cdot 2\cdot \ldots \cdot (n-2)} = \frac{(n-1)\cdot n}{2}.$$

Sprendžiame lygtį:

$\frac{n(n-1)}{2} = 210$, $n^2 - n - 420 = 0$, $n_1 = 21$, $n_2 = -20$ (netinka, nes $n \in N$).

Atsakymas. 21.

Uždaviniai savarankiškam darbui

1. Išspręskite lygtis:

1) $C_{x-1}^{x-2} = x^2 - 13$;

2) $C_x^{x-2} = C_x^3$;

3) $3C_{2x}^{x-1} = 5C_{2x-1}^{x}$;

4) $A_{x-1}^2 - C_x^1 = 79$;

5) $3C_{x+1}^2 - 2A_x^2 = x$;

6) $C_x^{x-2} = 6$;

7) $\frac{C_{x+1}^2}{C_x^3} = \frac{4}{5}$;

8) $12C_x^1 + C_{x+4}^2 = 162$;

9) $A_x^3 + C_x^{x-2} = 14x$;

10) $A_{2x}^3 = 14A_x^3$;

11) $C_{x+1}^{x-4} = \frac{7}{15}A_{x+1}^3$;

12) $C_{x+1}^3 : C_x^4 = 6:5$;

13) $A_{x-2}^3 = 4A_{x-3}^2$;

14) $C_{x+1}^2 \cdot A_x^2 - 4x^3 = \left(A_{2x}^1\right)^2$;

15) $C_x^3 = \frac{5x}{4}(x-3)$;

16) $3C_{x+1}^2 + P_2 \cdot x = 4A_x^2$;

17) $C_{n+1}^{m+1} : C_{n+1}^{m} : C_{n+1}^{m-1} = 5:5:3$;

18) $\frac{P_{x+3}}{A_x^5 \cdot P_{x-5}} = 720$;

19) $A_{x+3}^2 = C_{x+2}^3 + 20$;

20) $C_x^3 + C_x^4 = 11C_{x+1}^2$;

21) $\frac{P_{n+2}}{P_n} = 72$;

22) $C_x^4 = \frac{15}{4}A_x^2$;

23) $11C_x^3 = 24C_{x+1}^2$;

24) $\frac{A_n^4}{C_{n-1}^3} = 60$.

2. Išspręskite lygčių sistemas:

1) $\begin{cases} C_x^y = C_x^{2-y}, \\ C_x^2 = 153; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} A_x^2 = 272, \\ C_x^y = 136; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} C_x^2 = 66, \\ C_x^y = C_x^{y+2}. \end{cases}$

3. Sudarykite lygtis ir jas išspręskite:

1) Draugai apsikeitė 20 nuotraukų. Kiekvienas draugas įteikė nuotrauką kiekvienam savo draugui. Kiek draugų keitėsi nuotraukomis?

2) Stalo teniso varžybų dalyvis susitiko po vieną kartą su visais kitais tenisininkais. Iš viso sužaistos 55 partijos. Kiek tenisininkų dalyvavo turnyre?

3) Iš brigados pasirinkti 2 žmones yra 182 galimybės. Kiek brigadoje žmonių?

4) Žirgų lenktynėse užimti pirmąsias dvi vietas yra 90 galimybių. Kiek žirgų dalyvavo lenktynėse?

5) Iš kiek žmonių galima sudaryti 15 skirtingų porų?

6) Biliardo turnyre buvo sužaistos 45 partijos. Kiekvienas dalyvis sužaidė su likusiais po vieną partiją. Kiek dalyvių dalyvavo turnyre?

4. Išspręskite nelygybes:

1) $C_{13}^x < C_{13}^{x+2}$;

2) $C_{18}^{x-2} > C_{18}^x$;

3) $C_x^6 < C_x^4$;

4) $5C_x^3 < C_{x+2}^4$;

5) $C_{x+1}^{x-1} > \frac{3}{2}$;

6) $C_{x+1}^{x-1} < 21$;

7) $2C_n^5 > 11C_{n-2}^3$;

8) $C_{n+1}^{n-2} - C_{n+1}^{n-1} \leq 100$;

9) $\frac{A_{n+1}^4}{C_{n-1}^{n-3}} > 14P_3$;

10) $A_{x+1}^{x-2} < A_x^{x-1}$;

11) $A_{10}^{x-1} \geq \frac{2}{x} A_{10}^x$;

12) $C_{19}^{x-1} < C_{19}^x$.

5. Kiek neigiamų narių turi seka (x_n), jei $x_n = C_{n+5}^4 - \frac{143}{96} \cdot \frac{P_{n+5}}{P_{n+3}}$?

6. Apskaičiuokite sekos (x_n) neigiamų narių reikšmes, kai

$$x_n = \frac{A_{n+4}^4}{P_{n+2}} - \frac{143}{4P_n}.$$

7. Kiek teigiamų narių turi seka (x_n), jei $x_n = 15(x-1) - C_x^2 - C_x^3$?

8. Apskaičiuokite:

1) $A_{10}^3 - A_9^2$; 2) $\frac{5!+6!}{4!}$; 3) $\frac{C_4^2 \cdot P_3}{A_5^3}$; 4) $\frac{A_{20}^5 + A_{20}^6}{A_{20}^4}$;

5) $\frac{15!}{7! \cdot 9!}$; 6) $\frac{P_8}{A_8^3 \cdot C_8^2}$.

2.6. Niutono binomas

Paskalio trikampis. C_n^k bei jų skaitines reikšmes, apskaičiuotas pagal formulę $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$, $k < n$ (prisiminkite, kad $C_n^0 = C_n^n = 1$, $C_0^0 = 1$), patogu surašyti į lentelę, kuri vadinama **Paskalio trikampiu**:

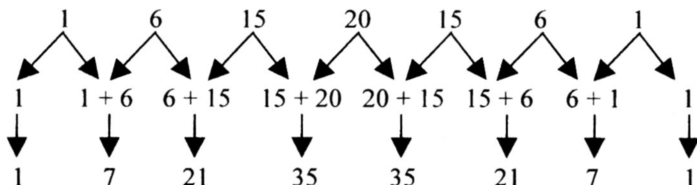
$n = 0$	C_0^0	1
$n = 1$	$C_1^0\ C_1^1$	1 1
$n = 2$	$C_2^0\ C_2^1\ C_2^2$	1 2 1
$n = 3$	$C_3^0\ C_3^1\ C_3^2\ C_3^3$	1 3 3 1
$n = 4$	$C_4^0\ C_4^1\ C_4^2\ C_4^3\ C_4^4$	1 4 6 4 1
$n = 5$	$C_5^0\ C_5^1\ C_5^2\ C_5^3\ C_5^4\ C_5^5$	1 5 10 10 5 1
$n = 6$	$C_6^0\ C_6^1\ C_6^2\ C_6^3\ C_6^4\ C_6^5\ C_6^6$	1 6 15 20 15 6 1
$n = 7$	$C_7^0\ C_7^1\ C_7^2\ C_7^3\ C_7^4\ C_7^5\ C_7^6\ C_7^7$	1 7 21 35 35 21 7 1.

- -

Pirmasis ir paskutinis kiekvienos eilutės elementas yra lygus 1, nes $C_n^0 = C_n^n = 1$.

Kiti eilutės elementai randami pagal **taisyklę**: kiekvienas elementas, išskyrus kraštinius elementus, kurie lygūs 1, yra lygus skaičių, esančių virš jo kairėje ir dešinėje, sumai.

Pavyzdžiui, 7 – oji eilutė iš 6 – osios gaunama taip:



Niutono formulė. Paskalio trikampio eilučių elementai atitinka dvinario a + b n – tojo laipsnio koeficientus:

$(a + b)^0 = 1 = C_0^0$,

$(a + b)^1 = 1 \cdot a + 1 \cdot b = C_1^0 a + C_1^1 b$,

$(a + b)^2 = 1 \cdot a^2 + 2ab + 1 \cdot b^2 = C_2^0 a^2 + C_2^1 ab + C_2^2 b^2$,

$(a + b)^3 = 1 \cdot a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1 \cdot b^3 = C_3^0 a^2 + C_3^1 a^2b + C_3^2 ab^2 + C_3^3 b^3$,

$(a+b)^4 = 1 \cdot a^4 + 4a^3b + 6a^2b + 4ab^3 + 1 \cdot b^4 = C_4^0 a^4 + C_4^1 a^3b + C_4^2 a^2b^2 + C_4^3 ab^3 + C_4^4 b^4$,

- -

- -

Bendru atveju:

$$(a + b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \ldots + C_n^k a^{n-k} b^k + \ldots + C_n^n b^n.$$

Ši formulė vadinama **Niutono formule**. Dešinioji šios formulės dalis vadinama **binomo skleidiniu**. Koeficientai C_n^k vadinami **binominiais koeficientais**.

Kadangi $C_n^0 = 1$, $C_n^1 = n$, $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2!}$, $C_n^3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}$ ir t.t.,

tai Niutono binomo formulę galime užrašyti šitaip:

$$(a + b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!} + a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} a^{n-3}b^3 + \ldots + b^n.$$

Niutono formulės savybės:

1) Skleidinio binominiai koeficientai yra Paskalio trikampio n – tosios eilutės skaičiai;

2) Skleidinio binominiai koeficientai, vienodai nutolę nuo pirmojo ir paskutiniojo nario, yra lygūs;

3) Kiekvieno skleidinio nario, pradedant antruoju, dauginamojo *a* laipsnio rodiklis yra vienetu mažesnis, negu prieš jį einančio nario dauginamojo *a* laipsnio rodiklis, o dauginamojo b laipsnio rodiklis yra vienetu didesnis, negu prieš jį einančio nario dauginamojo b laipsnio rodiklis (pirmojo skleidinio nario dauginamasis *a* yra n – tojo laipsnio, o dauginamasis b – nulinio laipsnio);

4) Bet kuriame naryje *a* ir b laipsnių rodiklių suma lygi n;

5) Visų binominių koeficientų suma lygi 2^n:

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n = 2^n;$$

6) Dešinėje Niutono formulės pusėje yra n + 1 dėmuo;

7) Kiekvienas dėmuo turi pavidalą $C_n^k a^{n-k} b^k$.

(k + 1) – ojo nario formulė yra

$$T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k,$$

nes dėmuo $C_n^k a^{n-k} b^k$ yra (k + 1) – oje vietoje.

1 pavyzdys. Rasime binomo $(3 + 2x)^4$ skleidinį.

Sprendimas. Remiamės Niutono formule:

$$(3+2x)^4 = C_4^0 \cdot 3^4 \cdot (2x)^0 + C_4^1 \cdot 3^3 \cdot (2x)^1 + C_4^2 \cdot 3^2 \cdot (2x)^2 +$$
$$+ C_4^3 \cdot 3^1 \cdot (2x)^3 + C_4^4 \cdot 3^0 \cdot (2x)^4 = 3^4 + 4 \cdot 3^3 \cdot 2x + \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} \cdot 3^2 \cdot 4x^2 +$$
$$+ \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot 3 \cdot 8x^3 + 16x^4 = 81 + 216x + 216x^2 + 96x^3 + 16x^4.$$

2 pavyzdys. Rasime binomo $(2x - 3)^5$ skleidinį.

Sprendimas. Tarkime, kad $a = 2x$, o $b = -3$. Tada remiantis Niutono formule:

$(a + b)^5 = C_5^0 a^5 + C_5^1 a^4 b + C_5^2 a^3 b^2 + C_5^3 a^2 b^3 + C_5^4 a b^4 + C_5^5 b^5$.

Randame binominius koeficientus C_5^0, C_5^1, C_5^2, C_5^3, C_5^4 ir C_5^5:

$$C_5^0 = 1,\ C_5^1 = 5,\ C_5^2 = \frac{5(5-1)}{2!} = \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} = 10,$$

$$C_5^3 = \frac{5(5-1)(5-2)}{3!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 10,$$

$$C_5^4 = \frac{5(5-1)(5-2)(5-3)}{4!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 5,\ C_5^5 = 1.$$

Vadinasi, $(a + b)^5 = a^5 + 5a^4 b + 10a^3 b^2 + 10a^2 b^3 + 5ab^4 + b^5$;

Į pastarąją išraišką įrašę $a = 2x$, o $b = -3$, gauname:

$(2x - 3)^5 = (2x)^5 + 5(2x)^4(-3) + 10(2x)^3(-3)^2 + 10(2x)^2(-3)^3 +$
$+ 5(2x)(-3)^4 + (-3)^5 = 32x^5 - 240x^4 + 720x^3 - 1080x^2 + 810x - 243$.

3 pavyzdys. Rasime binomo $(1 - 3x^2)^6$ skleidinį.

Sprendimas. Vėl taikome Niutono formulę:

$$(1-3x^2)^6 = (1+(-3x^2))^6 = C_6^0 \cdot 1^6 \cdot (-3x^2)^0 + C_6^1 \cdot 1^5 \cdot (-3x^2)^1 + C_6^2 \cdot 1^4 \cdot (-3x^2)^2 +$$
$$+ C_6^3 \cdot 1^3 \cdot (-3x^2)^3 + C_6^4 \cdot 1^2 \cdot (-3x^2)^4 + C_6^5 \cdot 1^1 \cdot (-3x^2)^5 + C_6^6 \cdot 1^0 \cdot (-3x^2)^6.$$

Randame binominius koeficientus:

$$C_6^0 = 1,\ C_6^1 = 6,\ C_6^2 = \frac{6(6-1)}{2!} = \frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1} = 15,$$

$$C_6^3 = \frac{6(6-1)(6-2)}{3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 20,$$

$$C_6^4 = \frac{6(6-1)(6-2)(6-3)}{4!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 15,$$

$$C_6^5 = \frac{6(6-1)(6-2)(6-3)(6-4)}{5!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 6,\ C_6^6 = 1.$$

Įstatę apskaičiuotus binominius koeficientus, gauname:

$$\left(1-3x^2\right)^6=1+6\cdot\left(-3x^2\right)+15\cdot\left(-3x^2\right)^2+20\cdot\left(-3x^2\right)^3+15\cdot\left(-3x^2\right)^4+$$
$$+6\cdot\left(-3x^2\right)^5+\left(-3x^2\right)^6=1-18x^2+135x^4-540x^6+1215x^8-1458x^{10}+729x^{12}.$$

4 pavyzdys. Rasime binomo $\left(x+\frac{2}{x}\right)^{12}$ skleidinio aštuntąjį narį.

Sprendimas. Pritaikę $(k+1)$ – ojo nario formulę $T_{k+1}=C_n^k a^{n-k}b^k$, gauname:

$$T_{7+1}=C_{12}^7 x^{12-7}\left(\frac{2}{x}\right)^7=C_{12}^5x^5\cdot128\cdot x^{-7}=\frac{12!}{5!\,7!}\cdot128\cdot x^{-2}=$$

$=792\cdot128\cdot x^{-2}=101376\cdot x^{-2}$.

5 pavyzdys. Rasime skleidinio narį, kuriame nebūtų x, jeigu binomo $\left(2x+\frac{1}{x}\right)^n$ skleidinio koeficientų suma lygi 256.

Sprendimas. Pasinaudoję Niutono formulės 5 savybe, turime, kad

$C_n^0+C_n^1+C_n^2+\ldots+C_n^n=2^n=256;\quad 2^n=256;\quad 2^n=2^8;\quad n=8.$

Tarkime, kad x neturi $(k+1)$ – asis narys.

$$T_{k+1}=C_n^k(2x)^{n-k}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)^k=C_n^k\cdot2^{n-k}\cdot x^{n-k}\cdot x^{-k}=C_n^k\cdot2^{n-k}\cdot x^{n-2k}.$$

Kadangi T_{k+1} narys neturi x, tai $x^{n-2k}=x^o=1$, iš čia $n-2k=0$. Kadangi $n=8$, tai $8-2k=0$; iš čia $k=4$. Vadinasi, x neturi $k+1=4+1=5$ – asis narys. Apskaičiuokite šį narį iš formulės

$$T_{k+1}=C_n^k\cdot2^{n-k}\cdot x^{n-2k}:T_5=C_8^4\cdot2^{8-4}\cdot x^{8-8}=C_8^4\cdot2^4=\frac{8(8-1)(8-2)(8-3)}{1\cdot2\cdot3\cdot4}\cdot16=$$

$$=\frac{8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot16}{1\cdot2\cdot3\cdot4}=1120.$$

Atsakymas. 1120.

6 pavyzdys. Rasime binomo $\left(\frac{1}{x}+\sqrt{x}\right)^{12}$ skleidinio narį, kuriame nebūtų x.

Sprendimas. Tarkime, kad kintamojo x neturi (k + 1) – asis skleidinio narys. Remdamiesi (k + 1) – ojo nario formule $T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k$ ir atsižvelgę į tai, kad $a = \frac{1}{x}$, o $b = \sqrt{x}$, n = 12, gauname:

$T_{k+1} = C_{12}^k \left(\frac{1}{x}\right)^{12-k} \cdot \left(\sqrt{x}\right)^k = C_{12}^k x^{\frac{3}{2}k-12}$. Kad (k + 1) – asis narys T_{k+1} neturėtų x, būtina ir pakanka, kad $x^{\frac{3}{2}k-12} = 1$ arba $x^{\frac{3}{2}k-12} = x^0$, iš čia $\frac{3}{2}k - 12 = 0$, t.y. k = 8. Vadinasi, k + 1 = 8 +1 = 9 – asis skleidinio narys neturi x. Apskaičiuojame šį narį:

$T_9 = T_{8+1} = C_{12}^8 = C_{12}^4 = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 495$. **Atsakymas.** 495.

7 pavyzdys. Binomo $\left(x^2 - \frac{2}{x}\right)^n$ skleidinio pirmųjų trijų narių koeficientų suma lygi 97. Raskite skleidinio narį, turintį x^4.

Sprendimas. Pirmasis skleidinio narys yra $C_n^0 (x^2)^n$, antrasis $C_n^1 (x^2)^{n-1} \frac{2}{x} = -2C_n^1 x^{2n-3}$, o trečiasis narys yra

$$C_n^2 (x^2)^{n-2} \left(\frac{2}{x}\right)^2 = 4C_n^2 (x^2)^{n-2} \cdot x^{-2} = 4C_n^2 x^{2n-6}.$$

Pagal uždavinio sąlygą šių narių koeficientų C_n^0, $-2C_n^1$, $4C_n^2$ suma $C_n^0 - 2C_n^1 + 4C_n^2 = 97$, t.y. 1 – 2n + 2n(n – 1) = 97. Iš pastarosios lygybės $n_1 = 8$, $n_2 = -6$. Sąlygą tenkina tik n = 8, t.y. binomas yra 8 laipsnio.

Sakykime, kad x^4 turi (k + 1) – asis skleidinio narys: $T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k$.

Mūsų uždavinyje $n = 8$, $a = x^2$, $b = -\frac{2}{x}$, tai:

$$T_{k+1} = C_8^k (x^2)^{8-k}\left(-\frac{2}{x}\right)^k = (-1)^k 2^k C_8^k (x^2)^{8-k} \cdot x^{-k} = (-2)^k C_8^k x^{16-3k};$$

kadangi (k + 1) – ojo nario kintamasis x turi būti ketvirtojo laipsnio, tai $16 - 3k = 4$, $k = 4$. Taigi x^4 turi penktasis dėstinio narys, kurį ir apskaičiuojame:

$$T_5 = T_{4+1} = (-2)^4 C_8^4 x^{16-4\cdot 3} = 16 \cdot \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} x^4 = 1120x^4.$$

Atsakymas. $T_5 = 1120x^4$.

8 pavyzdys. Binomo $(1 + x)^n$ skleidinio ketvirtasis narys lygus 0,96. Rasime x ir n reikšmes, kai binominių koeficientų suma lygi 1024.

Sprendimas. Kadangi binominių koeficientų suma lygi 2^n, tai iš uždavinio sąlygos $2^n = 1024$. Kadangi $1024 = 2^{10}$, tai $2^n = 2^{10}$; iš čia $n = 10$. Ketvirtasis skleidinio narys $T_4 = T_{3+1} = C_{10}^3 x^3 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 = 120x^3$. Pagal sąlygą $120x^3 = 0,96$; iš čia $x^3 = 0,008$, t.y. $x = 0,2$.

Atsakymas. $x = 0,2$; $n = 10$.

9 pavyzdys. Rasime binomo $\left(\sqrt[9]{\frac{5}{437}} + \sqrt[6]{\frac{2}{7}}\right)^{24}$ skleidinio racionaliuosius narius.

Sprendimas. (k + 1) – asis skleidinio narys yra $T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k$.

Pagal uždavinio sąlygą $n = 24$, $a = \sqrt[9]{\frac{5}{437}}$, $b = \sqrt[6]{\frac{2}{7}}$, todėl:

$$T_{k+1} = C_{24}^k \left(\sqrt[9]{\frac{5}{437}}\right)^{24-k} \cdot \left(\sqrt[6]{\frac{2}{7}}\right)^k = C_{24}^k \left(\frac{5}{437}\right)^{\frac{24-k}{9}} \cdot \left(\frac{2}{7}\right)^{\frac{k}{6}}.$$

T_{k+1} bus racionalusis skaičius tik tada, kai $\frac{24-k}{9}$ ir $\frac{k}{6}$ bus sveikieji neneigiami skaičiai, be to, $0 \le k \le 24$. Sąlygą "$\frac{k}{6}$ yra racionalusis skaičius" tenkina tiktai šios k reikšmės: 0, 6, 12, 18, 24. Iš šių k reikšmių tinka tik 6 ir 24, nes tada $\frac{24-k}{9}$ yra sveikasis skaičius. Apskaičiuojame ieškomuosius narius:

kai $k = 6$, tai $T_{6+1} = T_7 = C_{24}^{6}\left(\frac{5}{437}\right)^{\frac{24-6}{9}} \cdot \left(\frac{2}{7}\right)^{\frac{6}{6}} = \frac{2200}{437}$,

kai $k = 24$, tai $T_{24+1} = T_{25} = C_{24}^{24}\left(\frac{5}{437}\right)^{\frac{24-24}{9}} \cdot \left(\frac{2}{7}\right)^{\frac{24}{6}} = \frac{16}{2401}$.

Atsakymas. $T_7 = \frac{2200}{437}$ ir $T_{25} = \frac{16}{2401}$.

10 pavyzdys. Rasime daugianario $(1 + 3x + 2x^3)^{10}$ koeficientą prie x^4.

Sprendimas. Įrašę į Niutono formulę $n = 10$, $a = 1$, $b = 3x + 2x^3$, gauname:

$$(1 + 3x + 2x^3)^{10} = (\underset{a}{1} + \underbrace{(3x + 2x^3)}_{b})^{10} = C_{10}^{0}(3x + 2x^3)^0 + C_{10}^{1}(3x + 2x^3) +$$

$$+ C_{10}^{2}(3x + 2x^3)^2 + C_{10}^{3}(3x + 2x^3)^3 + C_{10}^{4}(3x + 2x^3)^4 + C_{10}^{5}(3x + 2x^3)^5 +$$

$$+ \ldots + C_{10}^{10}(3x + 2x^3)^{10}.$$

Lengva pastebėti, kad binomo $(1 + 3x + 2x^3)^{10}$ skleidinys turi tiktai 2 narius, į kuriuos įeina x^4, tai trečiasis skleidinio narys $C_{10}^{2}(3x + 2x^3)^2$ ir penktasis skleidinio narys $C_{10}^{4}(3x + 2x^3)^4$. Binomo dėstinyje palikę tik šiuos du narius, o kitus narius pakeitę daugtaškiu, gauname:

$$(1 + 3x + 2x^3)^{10} = C_{10}^{2}(3x + 2x^3)^2 + C_{10}^{4}(3x + 2x^3)^4 + \ldots =$$

$$= C_{10}^{2}12x^4 + \ldots + C_{10}^{4}(3x)^4 + \ldots = (12C_{10}^{2} + 3^4 C_{10}^{4})x^4 + \ldots$$

Taigi ieškomasis koeficientas lygus $12C_{10}^2 + 3^4C_{10}^4 = 17550$.

Atsakymas. 17550.

11 pavyzdys. Su kuria x reikšme binomo $\left(10^{\lg\sqrt{x}} + \dfrac{1}{10^{\frac{1}{\lg x}}}\right)^7$ skleidinio ketvirtasis narys lygus 3500000?

Sprendimas. skleidinio ketvirtasis narys yra

$T_4 = C_7^3\left(10^{-\frac{1}{\lg x}}\right)^3 \cdot \left(10^{\lg\sqrt{x}}\right)^4$. Remdamiesi uždavinio sąlyga sudarome lygtį:

$$C_7^3 \cdot 10^{-\frac{3}{\lg x}} \cdot 10^{4\lg x^{\frac{1}{2}}} = 3500000,$$

$$35 \cdot 10^{-\frac{3}{\lg x}+2\lg x} = 3500000,$$

$$10^{-\frac{3}{\lg x}+2\lg x} = 10^5,$$

$$2\lg^2 x - 5\lg x - 3 = 0,$$

$$\lg x \neq 0,\ x \neq 1,\ x > 0.$$

Įvedame pakeitimą

$\lg x = y.$

$2y^2 - 5y - 3 = 0,$

$y_1 = 3,\ y_2 = -\dfrac{1}{2}.$

$\lg x = 3$ ir $\lg x = -\dfrac{1}{2}$,

$x = 1000$; $x = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$.

Atsakymas. $\dfrac{1}{\sqrt{10}}$; 1000.

12 pavyzdys. Raskite binomo $\left(\sqrt[7]{a^{-1}} - a^{\frac{2}{35}} \cdot \sqrt[5]{a}\right)^m$ skleidinio narį, turintį a pirmuoju laipsniu, jeigu skleidinio trečiojo nario koeficientas 35 vienetais didesnis, negu antrojo nario koeficientas.

Sprendimas.

$$\left(\sqrt[7]{a^{-1}}-a^{\frac{2}{35}}\cdot\sqrt[5]{a}\right)^m=\left(a^{-\frac{1}{7}}-a^{\frac{9}{35}}\right)^m.$$

$C_m^2-C_m^1=35$, t.y. $\frac{m(m-1)}{2}-m=35$.

Iš čia $m=10$ arba $m=-7$ (netinka, nes $m<0$).

$$T_{k+1}=(-1)^k\cdot C_{10}^k\cdot a^{\frac{9}{35}k}\cdot a^{-\frac{1}{7}(10-k)}=(-1)^k\cdot C_{10}^k\cdot a^{\frac{9}{35}k-\frac{1}{7}(10-k)}.$$

Vadinasi, $\frac{9}{35}k-\frac{1}{7}(10-k)=1$.

Išsprendę šią lygtį, randame, kad $k=\frac{85}{14}$. Bet skaičius $\frac{85}{14}$ nėra natūralusis, todėl nario, turinčio a pirmuoju laipsniu, dėstinyje nėra.

Atsakymas. Tokio nario nėra.

13 pavyzdys. Su kuriomis x reikšmėmis penktasis binomo $(2x+3)^9$ skleidinio narys bus didesnis už prieš jį ir po jo stovinčius gretimus narius, t.y. didesnis už ketvirtąjį ir šeštąjį narį.

Sprendimas. Sudarome nelygybių sistemą: $\begin{cases} T_5>T_4, \\ T_5>T_6. \end{cases}$

Remdamiesi skleidinio bendrojo nario formule, gauname:

$$\begin{cases} C_9^5(2x)^4 3^5>C_9^4(2x)^5 3^4, \\ C_9^5(2x)^4 3^5>C_9^6(2x)^3 3^6. \end{cases}$$

Supaprastinę gauname: $\begin{cases} 3x^4>2x^5, \\ x^4>x^3, \end{cases}$ arba $\begin{cases} 3-2x>0, \\ x(x-1)>0. \end{cases}$

Išsprendę pastarąją sistemą, gausime: $x\in(-\infty;\ 0)\cup\left(1;\ \frac{3}{2}\right)$.

Atsakymas. $x\in(-\infty;\ 0)\cup\left(1;\ \frac{3}{2}\right)$.

Uždaviniai savarankiškam darbui

1. Raskite binomo skleidinį:

1) $(x+1)^7$; 2) $(x-2)^5$; 3) $(3x+2y)^4$; 4) $\left(x^2-\frac{1}{x}\right)^6$.

2. Apskaičiuokite:

1) $\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)^4$; 2) $\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)^4$; 3) $\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)^5$; 4) $\left(\sqrt{10}-\sqrt{2}\right)^5$.

3. Raskite binomo skleidinio narį, kuriame nėra x:

1) $\left(x+\frac{1}{x}\right)^8$; 2) $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}+\sqrt[4]{x^3}\right)^{17}$;

3) $\left(\sqrt[3]{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{15}$; 4) $\left(x\sqrt[3]{x^{-1}}+\frac{1}{\sqrt[7]{x^2}}\right)^{10}$.

4. Raskite binomo $\left(a+\frac{1}{a}\right)^{12}$ skleidinio koeficientą prie a^8.

5. Raskite binomo $\left(2a-\frac{1}{3a}\right)^{10}$ skleidinio koeficientą prie a^4.

6. Raskite binomo $(3a-2)^n$ laipsnio rodiklį, jei skleidinio koeficientas prie a^2 lygus 216.

7. Raskite ketvirtąjį binomo $(8x-5y)^6$ skleidinio narį.

8. Raskite binomo $\left(\sqrt[3]{x^{-2}}+x\right)^7$ skleidinio narį, turintį antrojo laipsnio rodiklį.

9. Raskite binomo $\left(\frac{3}{4}\sqrt[3]{a^2}+\frac{2}{3}\sqrt{a}\right)^{12}$ skleidinio nario, turinčio a^7 numerį.

10. Raskite binomo $\left(x^2-\frac{1}{4}\right)^n$ laipsnio rodiklį, jei koeficientas prie x^2 lygus 31.

11. Raskite binomo $(x + y + z)^7$ skleidinio nario prie $x^2y^3z^2$ koeficientą.

12. Raskite binomo $\left(\sqrt[3]{x}+\frac{1}{x}\right)^n$ laipsnio rodiklį, jei skleidinio penktasis narys nepriklauso nuo x. Apskaičiuokite A_n^2.

13. Raskite binomo $(1 + x^5 + x^7)^n$ skleidinio koeficientus prie x^{17} ir x^{18}.

14. Raskite x, jeigu binomo $\left(2\cdot\sqrt[x]{2^{-1}}+\frac{4}{\sqrt[x+4]{4}}\right)^6$ skleidinio trečiasis narys lygus 240.

15. Su kuria x reikšme binomo $\left(x+x^{\lg x}\right)^5$ skleidinio antrasis narys lygus 1000000?

16. Binomo $\left(\frac{2x}{3}+\frac{3}{2x^2}\right)^n$ skleidinio binominių koeficientų suma lygi 64. Raskite dėstinio narį, kuriame nėra x .

17. Binomo $\left(z^2+\frac{1}{z}\sqrt[3]{z}\right)^n$ skleidinio binominių koeficientų suma lygi 2048. Raskite trečiąjį narį.

18. Su kuria x reikšme binomo $\left(\left(\sqrt{x}\right)^{\frac{1}{\lg x+1}}+\sqrt[12]{x}\right)^6$ skleidinio ketvirtasis narys lygus 200?

19. Raskite binomo $\left(\frac{x\sqrt{x}}{b}+\frac{b}{\sqrt[3]{x^2}}\right)^m$ skleidinio narį, turintį $x^{5.5}$, jeigu skleidinio binominių koeficientų suma lygi 256.

20. Binomo $\left(x^2+\frac{1}{x}\right)^m$ skleidinio pirmojo, antrojo ir trečiojo nario koeficientų suma lygi 46. Raskite skleidinio narį, kuriame nėra x.

21. Suprastinkite reiškinį $\left(\dfrac{x+1}{x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{1}{3}}+1}-\dfrac{x-1}{x-x^{\frac{1}{2}}}\right)^{10}$. Raskite skleidinio narį, kuriame nėra x.

22. Raskite binomo $\left(a\sqrt{a}+\dfrac{1}{a^4}\right)^n$ laipsnio rodiklį, jei skleidinio antrojo nario koeficientas 44 vienetais didesnis, negu pirmojo nario koeficientas.

23. Raskite binomo $\left(\dfrac{a}{\sqrt{a}}-\sqrt[5]{\dfrac{a^{-2}}{\sqrt{a}}}\right)^n$ skleidinio vidurinįjį narį, jeigu skleidinio penktojo nario koeficientas sutinka su trečiojo nario koeficientu kaip $14:3$.

24. Raskite binomo $\left(\sqrt[13]{a}+\dfrac{a}{\sqrt{a^{-1}}}\right)^m$ skleidinio antrąjį narį, jei $C_m^3 : C_m^2 = 4:1$.

25. Raskite binomo $\left(\sqrt[3]{2}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)^x$ skleidinio laipsnio rodiklį x, jeigu septintojo nario, skaičiuojant nuo pradžios, ir septintojo nario, skaičiuojant nuo galo, koeficientų santykis lygus $\dfrac{1}{6}$.

26. Raskite x, jeigu binomo $\left(\sqrt{2^x}+\dfrac{1}{\sqrt{2^{x-1}}}\right)^m$ skleidinio trečiojo ir penktojo nario koeficientų suma lygi 135, o dėstinio paskutiniųjų trijų narių binominių koeficientų suma lygi 22.

27. Raskite x, jeigu binomo $\left(2^x + \frac{1}{4^x}\right)^n$ skleidinio pirmojo ir antrojo nario koeficientų suma lygi 36, o antrojo nario koeficientas 7 vienetais didesnis už pirmojo nario koeficientą.

28. Žinoma, kad binomo $(1 + x)^n$ skleidinio, trečiojo nario koeficientas yra keturis kartus didesnis už penktojo nario koeficientą, o ketvirtojo ir šeštojo narių koeficientų santykis lygus $\frac{40}{3}$. Raskite x ir n.

29. Raskite binomo $\left(\sqrt{2} + \sqrt[4]{3}\right)^{100}$ skleidinio racionaliųjų narių skaičių.

30. Kiek racionaliųjų narių yra binomo $\left(\sqrt[4]{3} + \sqrt[3]{4}\right)^n$ skleidinyje, jeigu trečiojo nario nuo pradžios ir trečiojo nario nuo galo koeficientų suma lygi 9900.

II skyrius
TIKIMYBIŲ TEORIJOS PRADMENYS

Tikimybių teorija yra matematikos šaka, tirianti masinių atsitiktinių reiškinių dėsningumus.

1. Įvykiai

Įvykis yra bandymo arba stebėjimo rezultatas.

1 pavyzdys. Lošimo kauliuko išmetimas – bandymas. Lyginio akučių skaičiaus (2, 4 arba 6) arba nelyginio akučių skaičiaus (1, 3 arba 5) iškritimas – galimi jo įvykiai.

2 pavyzdys. Iš dėžutės, kurioje yra 2 geltoni ir 3 raudoni rutuliukai, išimamas vienas rutuliukas – bandymas. Iš dėžutės ištraukiamas rutuliukas yra geltonas arba raudonas – galimi jo įvykiai.

Būtinas įvykis yra toks įvykis, kuris, atlikus bandymą, visada įvyksta.

1 pavyzdys. Jei metame tris lošimo kauliukus, tai įvykis – „iškrito ne daugiau kaip 18 akučių (per visus tris kauliukus)" – yra būtinas įvykis; jei metame kauliuką, tai įvykis – „iškrito ne daugiau kaip 6 akutės" – yra būtinas įvykis.

2 pavyzdys. Sklidiną vandens stiklinę apverčiame dugnu aukštyn. Tai, kad šiuo atveju vanduo išsipils, yra būtinas įvykis.

Negalimas įvykis – įvykis, kuris, atlikus bandymą, niekada neįvyksta.

1 pavyzdys. Jei dėžėje yra 3 mėlyni ir 4 žali rutuliai, tai įvykis – „ištrauktas iš dėžės rutulys yra raudonas" – negalimas įvykis, nes dėžėje nėra raudonų rutulių.

2 pavyzdys. Į taikinį šauta 3 kartus. Tai, kad pataikyta 5 kartus, yra negalimas įvykis.

Atsitiktinis įvykis yra toks įvykis, kuris, atliekant bandymą, gali įvykti arba neįvykti.

1 pavyzdys. Atliekame bandymą – iš dėžės, kurioje yra ir baltų, ir raudonų rutulių, ištraukiame vieną rutulį. Įvykis – „ištrauktas iš dėžės rutulys raudonas" – yra atsitiktinis įvykis, nes galėjo būti ištrauktas ir baltas rutulys.

Atsitiktiniai įvykiai žymimi didžiosiomis abėcėlės raidėmis A, B, C, D ir t.t.

2 pavyzdys. Metama ant stalo moneta atsivers herbu yra atsitiktinis įvykis, nes gali atsiversti ir skaičius.

Nesutaikomi įvykiai yra tokie įvykiai, kurie, atliekant bandymą, negali įvykti visi vienu metu, t.y. gali įvykti tik vienas iš jų.

Pavyzdžiui, metant lošimo kauliuką, įvykiai A – „atsivertė lyginis akučių skaičius (2, 4 arba 6)" ir B – „atsivertė nelyginis akučių skaičius" (1, 3 arba 5) yra nesutaikomi įvykiai, nes kiekvieną kartą, metant kauliuką, gali atsiversti arba lyginis, arba nelyginis akučių skaičius, t.y. gali įvykti tiktai vienas iš įvykių: arba A, arba B.

Poromis nesutaikomi įvykiai yra tokie įvykiai $A_1, A_2, \ldots, A_n$, kai bet kurie du iš jų yra nesutaikomi.

Įvykiui A priešingas įvykis yra toks įvykis $\overline{A}$, kuris įvyksta tada ir tik tada, kai neįvyksta A.

1 pavyzdys. Jei mėtome lošimo kauliuką, o įvykis A – „atsivertė lyginis akučių skaičius", tai įvykiui A priešingas įvykis $\overline{A}$ – „atsivertė nelyginis akučių skaičius".

2 pavyzdys. Jei įvykis A – „šaulys pataikė į taikinį", tai jam priešingas įvykis $\overline{A}$ – „šaulys nepataikė į taikinį".

3 pavyzdys. Metama moneta. Jei įvykis A – „atsivertė herbas", tai įvykis $\overline{A}$ – „atsivertė ne herbas, t.y. atsivertė skaičius".

Elementarieji įvykiai yra tokie įvykiai, iš kurių susideda kai kurie kiti įvykiai. Elementariųjų įvykių skaičių žymėsime n.

Pavyzdžiui, iš bandymo – metamas lošimo kauliukas – elementariųjų įvykių

E_1 – „atsivertė dvi akutės“,

E_2 – „atsivertė keturios akutės“,

E_3 – „atsivertė šešios akutės“

susideda įvykis A – „atsivertė lyginis akučių skaičius“, o tai reiškia, kad įvykis A įvyks, jei įvyks bent vienas iš trijų įvykių E_1, E_2, E_3.

Įvykiai E_1, E_2, E_3 yra neskaidomi į paprastesnius įvykius ir yra poromis nesutaikomi, t.y. negali įvykti kartu.

Elementariųjų įvykių aibė yra bandymo visų elementariųjų įvykių visuma. Su bandymu susiję elementarieji įvykiai yra poromis nesutaikomi ir vienas iš jų yra būtinasis įvykis.

1 pavyzdys. Dėžėje yra 3 rutuliai: raudonas, geltonas ir mėlynas. Iš jos vienu metu ištraukiami du rutuliai. Su šiuo bandymu susiję elementarieji įvykiai yra šie:

E_1 – „ištrauktas raudonas ir geltonas rutuliai“,

E_2 – „ištrauktas geltonas ir mėlynas rutuliai“,

E_3 – „ištrauktas raudonas ir mėlynas rutuliai“.

Įvykiai E_1, E_2, E_3 yra poromis nesutaikomi, t.y. negali įvykti vienu metu ir vienas iš jų yra būtinasis įvykis.

2 pavyzdys. Metama moneta. Kiek elementariųjų įvykių turi šis įvykis?

Monetos pusę su herbu žymėsime H, o su skaičiumi – S. Moneta gali atsiversti H arba S, todėl baigčių aibės dydis n = 2.

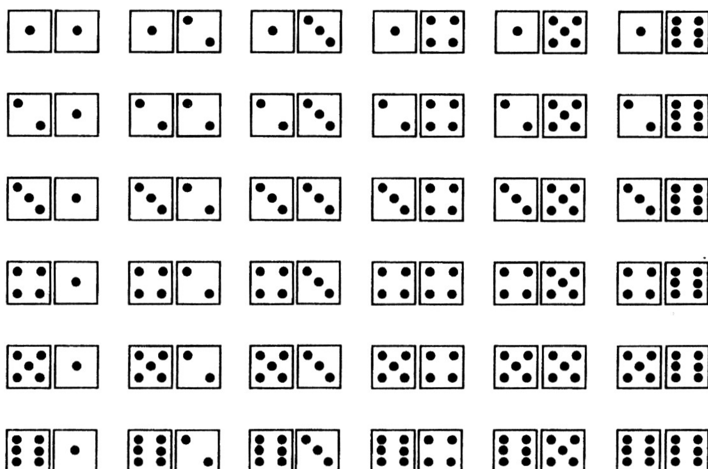
3 pavyzdys. Ridenamas lošimo kauliukas.

Šioje situacijoje elementariųjų įvykių skaičius n = 6, nes kauliukas gali atvirsti šiomis akutėmis:



4 pavyzdys. Ridenami du skirtingi lošimo kauliukai. Koks elementariųjų įvykių skaičius?

Lošimo kauliukai gali išsidėstyti taip:



Elementariųjų įvykių skaičius $n = 36$. Reikia atkreipti dėmesį, kad šiame pavyzdyje lošimo kauliukai laikomi skirtingais objektais, todėl ir yra laikomos skirtingomis baigtimis.

Jei ridenami vienodi kauliukai, tai ir laikomos vienodomis baigtimis ir tada elementariųjų įvykių aibė $n = 21$.

5 pavyzdys. Daugelyje azartinių lošimų, kuriuose ridenami du kauliukai, baigtis susijusi su atvirtusia bendra akučių suma. Pavyzdžiui, atvirtimą atitinka suma 8.

Bandymas: ridenami du kauliukai ir imama atvirtusių akučių suma. Koks elementariųjų įvykių skaičius?

Kadangi galimos sumos yra 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, todėl $n = 11$.

6 pavyzdys. Moneta metama tris kartus.

Galimi atvejai: HHH, HHS, HSH, HSS, SHH, SHS, SSH, SSS. Elementariųjų įvykių skaičius $n = 8$.

7 pavyzdys. Moneta metama aštuonis kartus.

Šiame pavyzdyje elementariųjų įvykių aibė yra per didelė, kad jos elementus galėtume surašyti ir suskaičiuoti, todėl taikysime daugybos taisyklę. Pirmojo metimo galimybių skaičius lygus 2 (H arba S), antrojo metimo galimybių skaičius lygus taip pat 2 ir t.t., todėl bendras baigčių skaičius $n = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^8 = 256$.

Įvykiui A palankūs elementarieji įvykiai yra tokie įvykiai, kuriems įvykstant įvyksta ir mus dominantis įvykis A.

1 pavyzdys. Dėžėje yra 4 rutuliai, pažymėti skaičiais 1, 2, 3, 4, t.y. rutuliai yra sunumeruoti. Iš jos vienu metu ištraukiami 3 rutuliai. Su šiuo bandymu susiję elementarieji įvykiai yra:

E_1 – „ištraukti rutuliai, pažymėti skaičiais 1, 2, 3";

E_2 – „ištraukti rutuliai, pažymėti skaičiais 2, 3, 4";

E_3 – „ištraukti rutuliai, pažymėti skaičiais 1, 3, 4";

E_4 – „ištraukti rutuliai, pažymėti skaičiais 1, 2, 4".

Elementariųjų įvykių skaičius lygus:

$$C_4^3 = \frac{4(4-1)(4-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 4.$$

Įvykiai E_1, E_2, E_3, E_4 yra poromis nesutaikomi ir vienas iš jų yra būtinas įvykis. Įvykiui A – „ištrauktųjų rutulių numerius žyminčių skaičių suma mažesnė už 8" – palankūs elementarieji įvykiai yra E_1 ir E_4, o įvykiui B – „ištrauktųjų rutulių numerius žyminčių skaičių suma didesnė už 6" – palankūs elementarieji įvykiai yra E_2, E_3, ir E_4.

Du įvykiai yra sutaikomi, jei abiem įvykiams yra bent vienas palankus elementarusis įvykis.

1 pavyzdys. Du šauliai, nepriklausomai vienas nuo kito, šauna į tą patį taikinį. Įvykiai: A – „pataikė pirmasis šaulys" ir B – „pataikė antrasis šaulys" – sutaikomi, nes, atliekant bandymą, į taikinį gali pataikyti abu šauliai.

2 pavyzdys. Įvykiai:

A – „atsitiktinai pasirinktas dviženklis skaičius dalijasi iš 3“ ir

B – „atsitiktinai pasirinktas dviženklis skaičius dalijasi iš 9“

yra sutaikomi, nes visada galima rasti tokį skaičių, kuris dalytųsi ir iš 3, ir iš 9 (pavyzdžiui, skaičius 27).

Uždaviniai savarankiškam darbui

1. Kiek elementariųjų įvykių turi įvykiai:

A – „metama moneta du kartus“;

B – „šaunama į taikinį su 10 koncentrinių skritulių ir įvykis yra pelnytų taškų skaičius“;

C – „įvykusių varžybų tarp dviejų futbolo komandų baigtis“;

D – „krepšininkas meta kamuolį į krepšį tris kartus“;

E – „iš dėžės, kurioje yra 5 skirtingų spalvų rutuliai, išimamas vienas rutulys“?

2. Kiek elementariųjų įvykių turi šie atsitiktiniai įvykiai:

A – „atsitiktinai traukiamas kauliukas iš pilno domino kauliukų komplekto“;

B – „atsitiktinai parašytų dviejų vienaženklių natūraliųjų skaičių suma lygi 10“;

C – „atsitiktinai ištrauktas kauliukas iš pilno domino kauliukų komplekto yra „dublis“ (kauliuko skyreliuose yra vienodas akučių skaičius)“;

D – „iškritusių lošimo kauliuko akučių skaičius yra nelyginis“;

E – „atsitiktinai paimtas 2001 metų sieninio kalendoriaus lapelis yra mėnesio 31 – osios dienos lapelis“;

F – „atsitiktinai paimtas žodis iš citatos „Svarbiausi gyvenimo klausimai dažniausiai yra tik tikimybių uždaviniai“ turi nemažiau kaip dvi balses „a“ “?

3. Kurie įvykiai yra būtinieji:

A – „šaunant tris kartus, pataikyta du kartus“;

B – „metus 2 kauliukus, iškrito ne daugiau kaip 12 akučių“;

C – „traukinys iš Kauno kasdien vėluoja“;

D –„triženklis skaičius ne didesnis už 1000“;

E – „iš skaitmenų 1, 2, 3 sudarytas skaičius mažesnis už 400“;

F – „atsitiktinai pasirinktas dviženklis skaičius dalijasi iš 3“;

G – „ryte saulė patekės“?

4. Kurie įvykiai yra negalimieji:

A – „triženklis skaičius parašytas skaitmenimis 1, 3, 7, dalijasi iš 5“;

B – „metus tris kauliukus iškrito 17 akių“;

C – „iš raidžių m, t, i, a, k sudarytas žodis „taškas“;

D – „iš pieštukų dėžutės, kurioje yra 12 pieštukų, paimti trys pieštukai“;

E – „iš skaitmenų 5, 6, 7 sudarytas triženklis skaičius yra didesnis už 800“?

5. Kurie įvykiai yra atsitiktiniai:

A – „medžiotojas nušovė kiškį“;

B – „metant lošimo kauliuką, iškrito lyginis akučių skaičius“;

C – „skaičius 147 dalijasi iš 3“;

E – „skaičius 25 mažesnis už 30“?

6. Nurodykite atsitiktinius, būtinuosius ir negalimuosius įvykius:

A – „skaičiaus ir jo skaitmenų sumos skirtumas dalijasi iš 9“;

B – „Vilniaus “Žalgirio” futbolininkai laimėjo Europos taurę“;

C – „iš dėžės, kurioje yra 5 rutuliukai, paimti 6 rutuliai“;

D – „skaičius sudarytas iš skaitmenų 1, 2, 3 dalijasi iš 5“;

E – „moksleivis per matematikos egzaminą gavo 6 balus“;

F – „$|a| + |b| \geq |a + b|$“.

7. Ar sutaikomi įvykiai A ir B, kai:

1) A – „atsitiktinai paimtas natūralusis skaičius nuo 1 iki 100 dalijasi iš 10“;

B – „atsitiktinai paimtas natūralusis skaičius nuo 1 iki 100 dalijasi iš 11“;

2) A – „šaškių partiją laimėjo Simas“;

B – „šaškių partiją laimėjo Lukas“;

3) A – „metant lošimo kauliuką, atsivertė lyginis akučių skaičius“;

B – „atsivertė nelyginis akučių skaičius“?

8. Parašykite įvykiams priešingus įvykius:

A – „saulė patekėjo“;

B – „studentas išlaikė egzaminą“;

C – „atidarius pašto dėžutę, rastas laiškas“;

D – „metant lošimo kauliuką, iškritusių akučių skaičius mažesnis už 3“;

E – “metant monetą, neatvirto skaičius”;

F – “gimė berniukas”.

9. Iš grupės išrenkamas vienas moksleivis. Kurie iš įvykių A ir B yra nesutaikomi:

1) A – „išrenkamas vaikinas“;

B – „išrenkama mergina“;

2) A – „išrenkamas vaikinas“;

B – „klasės seniūnas“;

3) A – „išrinkta mergina“;

B – „išrinktas sporto meistras“?

2. Veiksmai su įvykiais

Įvykių lyginumas

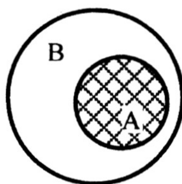
Palyginkime tokius įvykius:

A – „metus kauliuką, iškrito 2 akutės“;

B – „metus kauliuką, iškrito lyginis akučių skaičius“.

Pastebime tokius priežastinius ryšius tarp tų įvykių: jei įvyko A, tai tuo pačiu įvyko ir B, bet jei įvyko B, tai dar nereiškia, kad būtinai įvyko ir A. Matome, kad įvykiai A ir B nėra tolygūs vienas kitam, t.y. **įvykis A yra įvykio B dalis**. Žymima: $A \subset B$.

Įvykis B yra svarbesnis už įvykį A, nes įvykį B sudaro trys įvykiai: „iškrito 2 akutės“, „iškrito 4 akutės“, „iškrito 6 akutės“, tuo tarpu įvykis A – vienintelis. Geometriškai tai galima pavaizduoti taip:



Lygūs įvykiai A ir B yra tokie įvykiai, jei įvykus vienam iš jų, įvyksta ir kitas. Žymima: $A = B$.

1 pavyzdys. Įvykiai A – „ne visi klasės mokiniai sėkmingai išlaikė matematikos egzaminą“ ir B – „bent vienas klasės mokinys neišlaikė egzamino“ yra lygūs.

2 pavyzdys. Palyginkime įvykius:

A – „metus monetą, iškrito herbas“;

B – „metus monetą, neiškrito skaičius“.

Pastebime tokius priežastinius ryšius tarp įvykių: jei įvyko A, tai įvyko ir B; jei įvyko B, tai įvyko ir A. Vadinasi, įvykiai A ir B yra lygūs.

Įvykių sąjunga

Įvykių A ir B **sąjunga** (suma) vadinamas įvykis, kuris įvyksta tada ir tik tada, kai įvyksta bent vienas iš įvykių A ir B (arba A, arba B, arba A ir B kartu).

Įvykių A ir B suma žymima $A + B$ (galima žymėti $A \cup B$).

1 pavyzdys. Turime įvykius:

A – „metus kauliuką, iškrito 1 akis“;

B – „metus kauliuką, iškrito 2 akys“;

C – „metus kauliuką, iškrito ne daugiau kaip 2 akys“.

Įvykis C yra įvykių A ir B sąjunga, nes įvykiai A ir B negali įvykti kartu, įvyksta arba A, arba B.

2 pavyzdys. Jei bandymas yra „lošimo kauliuko metimas“, o įvykis A – „atsivertusių akučių skaičius yra skaičiaus 2 kartotinis“ (t.y. skaičius 2 arba 4), o įvykis B – „atsivertusių akučių skaičius yra skaičiaus 3 kartotinis“ (t.y. skaičius 3 arba 6), tai įvykis $A + B$ reiškia, kad atsivertusiųjų akučių skaičius yra arba 2, arba 3, arba 4, arba 6, t.y. arba skaičiaus 2, arba skaičiaus 3 kartotinis. A ir B yra nesutaikomi įvykiai, nes viename bandyme jie įvykti negali.

3 pavyzdys. Dėžėje yra baltų, žalių, mėlynų ir geltonų rutulių. Jei

įvykis A – „iš dėžės ištrauktas baltas rutulys“, o

įvykis B – „iš dėžės ištrauktas mėlynas rutulys“,

tai įvykis $A + B$ yra „ištrauktas baltas arba mėlynas rutulys“.

4 pavyzdys. Į taikinį šauta tris kartus. Turime įvykius:

A – „nepataikyta“;

B – „pataikyta 1 kartą“;

C – „pataikyta 2 kartus“;

D – „pataikyta 3 kartus“.

Suformuluokite įvykį $E = A + B + C + D$.

Atsakymas. E – „pataikyta ne daugiau kaip 3 kartus“.

Įvykių sankirta

Įvykių A ir B **sankirta** (sandauga) vadinamas toks įvykis, kuris įvyksta tada ir tada, kai įvyksta abu įvykiai A ir B.

Įvykių A ir B sandauga žymima $A \cdot B$ (galima žymėti $A \cap B$).

1 pavyzdys.

A – „pasirinktasis skaičius dalijasi iš 2“;

B – „pasirinktasis skaičius dalijasi iš 3“;

C – „pasirinktasis skaičius yra 6“.

Įvykis C reiškia tai, kad įvyko ir A, ir B kartu, t.y. skaičius 6 dalijasi iš 2 ir 3, todėl $C = AB$.

2 pavyzdys. Du šauliai, nepriklausomai vienas nuo kito, šauna po vieną kartą į tą patį taikinį.

Įvykis A – „pataikė pirmasis šaulys“.

Įvykis B – „pataikė antrasis šaulys“.

Įvykis AB – „pataikė abu šauliai“.

3 pavyzdys.

A – „atsitiktinai sutiktas asmuo – mergaitė“;

B – „atsitiktinai sutiktas asmuo – tamsiaplaukė“.

Suformuluokite įvykį $A \cdot B$.

Sprendimas.

AB – „atsitiktinai sutiktas asmuo – tamsiaplaukė mergaitė“.

Įvykių nesutaikomumas

Įvykiai A ir B vadinami **poromis nesutaikomi**, jei $A \cdot B$ – negalimas įvykis.

1 pavyzdys.

A – „metus monetą, iškrito herbas“;

B – „metus monetą, iškrito skaičius“.

AB – negalimas įvykis, nes vienu metu negali atsiversti ir moneta, ir herbas, todėl šie įvykiai yra poromis nesutaikomi.

2 pavyzdys.

A – „metus kauliuką, iškrito 1 akis“;

B – „metus kauliuką, iškrito 2 akys“;

C – „metus kauliuką, iškrito 3 akys“;

D – „metus kauliuką, iškrito ne daugiau kaip 3 akys“.

Įvykiai A ir B, A ir C, B ir C yra negalimi, todėl jie yra poromis nesutaikomi, o įvykis $D = A + B + C$, t.y. įvykiai A, B ir C sudaro įvykį D.

Priešingi įvykiai

Įvykiai A ir B vadinami **priešingais**, jeigu įvykių A ir B suma (sąjunga) yra būtinas įvykis, o sandauga (sankirta) – negalimas įvykis.

Pavyzdžiui, turime įvykius:

A – „rytoj snigs“;

B – „rytoj nesnigs“.

Įvykių A ir B suma – „rytoj snigs arba nesnigs“ yra būtinas įvykis, o įvykių A ir B sandauga – „rytoj tuo pačiu metu ir snigs, ir nesnigs“ yra negalimas įvykis, todėl įvykiai A ir B yra priešingi.

Uždaviniai savarankiškam darbui

1. Kuris įvykis sudaro kurio dalį?

1) Į taikinį šaunama 10 kartų:

A – „į taikinį pataikyta pirmu šūviu“;

B – „į taikinį pataikyta vienu iš keturių pirmųjų šūvių“;

C – „į taikinį pataikyta vienu iš dviejų pirmųjų šūvių“;

D – „į taikinį pataikyta ne vėliau kaip po penkių šūvių“?

2) Moneta metama tol, kol atvirs herbas, bet ne daugiau kaip 10 kartų.

A – „herbas atvirto metus 10 – tą kartą“;

B – „herbas atvirto metus ne pirmą kartą“;

C – „herbas atvirto metus monetą lyginį skaičių kartų“?

3) Metami du lošimo kauliukai.

A – „akių suma dalijasi iš 3“;

B – „akių suma dalijasi iš 6“;

C – „akių suma didesnė už 2“;

D – „akių suma nedidesnė už 12“.

4) Iš kortų kaladės traukiama korta.

A – „iš kortų kaladės ištraukta juodos spalvos korta“;

B – „iš kortų kaladės ištrauktas lapų karalius“;

C – „iš kortų kaladės ištrauktas juodos spalvos karalius“.

5) Vyksta rungtynės tarp Kauno ir Rygos krepšininkų.

A – „Kauno krepšininkai įveikė rygiečius rezultatu 75 : 69“;

B – „Kauno krepšininkai įveikė rygiečius“;

C – „Kauno krepšininkai įveikė rygiečius 6 taškų skirtumu“.

2. Kurie iš įvykių yra lygūs:

A – „medžiotojas nušovė kiškį antru šūviu“;

B – „medžiotojas nušovė kiškį iš 2 – jų šūvių, nors pirmuoju šūviu nepataikė“;

C – „medžiotojui nušauti kiškį reikėjo mažiau kaip 3 – jų šūvių“?

3. Suformuluokite įvykį E, kuris reiškia įvykių sąjungą, kai:

1) A – „į taikinį pataikyta pirmu šūviu“;

B – „į taikinį pataikyta antru šūviu“;

2) A – „loterijoje išlošta 10 litų“;

B – „loterijoje išlošta 20 litų“;

C – „loterijoje išlošti 25 litai“;

3) A – „metus dvi monetas, iškrito du herbai“;

B – „metus dvi monetas, iškrito herbas ir skaičius“;

4) A – „metus kauliuką, iškrito 6 akys“;
B – „metus kauliuką, iškrito 5 akys“;
C – „metus kauliuką, iškrito 4 akys“.

4. Suformuluokite įvykį E, kuris reiškia įvykių sankirtą, kai:

1) A – „pataikyta pirmu šūviu“;
B – „pataikyta antru šūviu“;

2) A – „metus kauliuką, iškrito nelyginis skaičius akių“;
B – „metus kauliuką, neiškrito 3 akys“;
C – „metus kauliuką, neiškrito 5 akys“;

3) A – „pirmu traukimu ištrauktas laimingas bilietas“;
B – „antru traukimu ištrauktas laimingas bilietas“.

5. Suformuluokite įvykius: 1) AB, 2) AC, 3) BC, kai:
A – „metus kauliuką iškrito lyginis skaičius akių“;
B – „metus kauliuką neiškrito 4 akys“;
C – „metus kauliuką neiškrito 6 akys“.

6. Atsitiktinai paimta detalė. Ji yra:
A – „pirmos rūšies“;
B – „antros rūšies“;
C – „trečios rūšies“.

Suformuluokite įvykius: 1) A + B; 2) $\overline{A+C}$; 3) AC; 4) AB + C.

2) „detalė – pirmos rūšies“; 3) AC – negalimas įvykis; 4) AB – negalimas įvykis, todėl AB + C = C, t.y. C – „detalė trečios rūšies“.

7. Pro mikroskopą stebimos keturios ląstelės. Per stebėjimo laiką kiekviena jų gali skilti arba neskilti. Nagrinėjami įvykiai:
A – „skilo viena ląstelė“;
B – „skilo bent viena ląstelė“;
C – „skilo ne mažiau kaip dvi ląstelės“;
D – „skilo visos keturios ląstelės“.

Ką reiškia įvykiai: 1) A + B; 2) AB; 3) B + C; 4) BC; 5) BD?

3. Klasikinis įvykio tikimybės apibrėžimas

Jei atliekame bandymą, kurio rezultatai yra vienodai galimi, tai įvykio A, susijusio su šiuo bandymu, **tikimybė** apskaičiuojama pagal formulę

$$\boxed{P(A)=\frac{m}{n},}$$

kur m – skaičius vienodai galimų įvykių, palankių įvykiui A, n – visų elementariųjų įvykių skaičius, o $P(A)$ – įvykio A tikimybė, be to, $0 \le m \le n$ ir $0 \le P(A) \le 1$.

Būtino įvykio A tikimybė $P(A)=1$, nes $m=n$.

Negalimo įvykio A tikimybė $P(A) = 0$, nes negalimas įvykis neįvyksta nė viename bandyme, todėl $m = 0$.

1 pavyzdys. Metama moneta. Kokia tikimybė, kad atsivers herbas?

Sprendimas. Galimi du elementarieji įvykiai: atsivers arba herbas, arba skaičius, o palankus įvykis – atsivers herbas, yra vienas, todėl šio įvykio tikimybė $P(A)=\frac{1}{2}$, nes $m=1$, o $n=2$. **Atsakymas.** $\frac{1}{2}$.

2 pavyzdys. Dėžėje yra 10 rutulių: 4 balti ir 6 juodi. Iš dėžės ištraukiamas vienas rutulys. Kokia tikimybė, kad ištrauktas rutulys yra juodas?

Sprendimas. Tarkime, kad visi dėžėje esantys rutuliai turi numerius 1, 2, ..., 10, be to, juodųjų rutulių numeriai yra 1, 2, 3, 4, 5, 6.

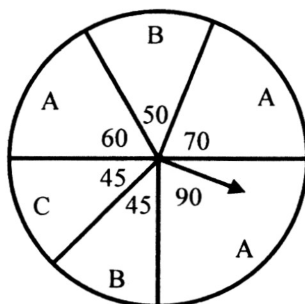
Pažymėkime E_i, kur $i = 1, 2, \ldots, 10$, įvykį – „iš dėžės ištraukto rutulio numeris yra i“.

Pavyzdžiui, įvykis E_1 – „iš dėžės ištraukto rutulio numeris yra 1“, įvykis E_2 – „iš dėžės ištraukto rutulio numeris yra 2“ ir t.t.

Šio bandymo elementarieji įvykiai yra $E_1, E_2, \ldots, E_{10}$, o įvykiui A palankūs įvykiai yra $E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6$.

Vadinasi, šiuo atveju $n = 10$, o $m = 6$ ir $P(A)=\frac{6}{10}=0{,}6$; čia įvykis A – „ištrauktas rutulys yra juodas“. **Atsakymas.** 0,6.

3 pavyzdys. Įsukto suktuko rodyklė gali sustoti bet kurioje padėtyje. Apskaičiuokite tikimybę, su kuria suktuko rodyklė sustos A raide pažymėtame sektoriuje.

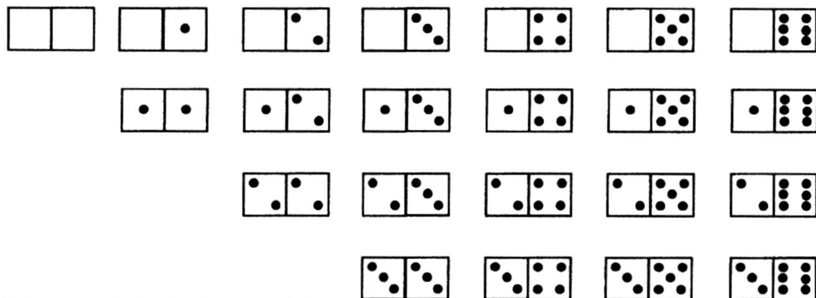


Sprendimas. Apskritimą sudaro 360°, todėl elementariųjų įvykių skaičius n =360. Sektorių, pažymėtų raide A yra trys, jie sudaro 90°, 60° ir 70° kampus, todėl palankių įvykių skaičius m = 90 + 60 + + 70 = 220. Tikimybė, kad suktuko rodyklė sustos A raide pažymėtame sektoriuje, lygi

$P(A)=\frac{220}{360}=\frac{11}{18}$. **Atsakymas.** $\frac{11}{18}$.

4 pavyzdys. Iš viso domino rinkinio traukiamas vienas kauliukas. Kokia tikimybė, kad ištraukto kauliuko taškų suma bus didesnė už 6, bet mažesnė už 10?

Sprendimas. Domino kauliukus galima pavaizduoti taip:



Elementariųjų įvykių skaičius n = 28, o palankių įvykių skaičius m = 8, todėl įvykio tikimybė

$$P(A)=\frac{8}{28}=\frac{2}{7}.$$

Atsakymas. $\frac{2}{7}$.

5 pavyzdys. Bilietai sunumeruoti nuo 1 iki 34. Atsitiktinai ištrauktas vienas bilietas. Kokia tikimybė, kad jo numeris yra skaičiaus 3 kartotinis?

Sprendimas. Tarp sunumeruotų bilietų nuo 1 iki 34 skaičiaus 3 kartotiniai yra šie skaičiai: 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, todėl palankių įvykių skaičius m = 11, o elementariųjų įvykių skaičius n = 34. Įvykio tikimybė

$$P(A)=\frac{11}{34}.$$

Atsakymas. $\frac{11}{34}$.

6 pavyzdys. Dėžutėje yra 5 kortelės, sunumeruotos skaičiais. 1, 2, 3, 4, 5. Atsitiktinai ištraukiama viena kortelė, užrašomas jos numeris ir kortelė grąžinama į dėžutę. Po to atsitiktinai traukiama kita kortelė ir užrašomas jos numeris. Raskite tikimybes įvykių:

A – „pirmasis skaičius mažesnis už antrąjį";

B – „abu skaičiai lyginiai".

Sprendimas. Elementariųjų įvykių aibę galima pavaizduoti taip:

(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5),
(2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5),
(3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5),
(4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5),
(5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5).

Įvykių skaičius $n=25$.

Palankių įvykiui A įvykių skaičius $m=10$, todėl $P(A)=\frac{2}{5}$.

Palankių įvykiui B įvykių skaičius $m=4$, todėl $P(B)=\frac{4}{25}$.

Atsakymas. $\frac{2}{5}$; $\frac{4}{25}$.

7 pavyzdys. Aštuoniose vienodose kortelėse parašyti skaičiai 2, 4, 6, 7, 8, 11, 12, 13. Atsitiktinai ištrauktos dvi kortelės. Kokia tikimybė, kad iš šių skaičių sudaryta trupmeną galima suprastinti?

Sprendimas. Skaičiai 2, 4, 6, 8 ir 12 yra lyginiai, o 7, 11 ir 13 – pirminiai. Pirminiai skaičiai nedalūs.

Elementariųjų įvykių skaičius $n = A_8^2 = 8 \cdot 7 = 56$. Palankias baigtis galime gauti tik iš skaitmenų 2, 4, 6, 8 ir 12, todėl $m = A_5^2 = 5 \cdot 4 = 20$. Įvykio tikimybė

$$P(A) = \frac{20}{56} = \frac{5}{14}.$$ **Atsakymas.** $\frac{5}{14}$.

8 pavyzdys. Penkios vienodos kortelės, kuriose parašytos raidės R, A, V, S, O, atsitiktinai dedamos į eilę. Kokia tikimybė sudėti žodį VORAS?

Sprendimas. Iš viso dėliojant korteles galima gauti $n = P_5 = 5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$ kombinacijų. Žodį VORAS galima sudėlioti tik vieninteliu atveju, todėl $m = 1$. Tikimybė sudėti žodį VORAS lygi $P(A) = \frac{1}{120} \approx 0{,}01$; čia įvykis A – „sudėtas žodis VORAS“.

Atsakymas. $\frac{1}{120} \approx 0{,}01$.

9 pavyzdys. Dėžėje yra 12 baltų ir 8 juodi vienodo didumo rutuliai. Nežiūrėdami išimame du rutulius. Kokia tikimybė, kad jie skirtingų spalvų?

Sprendimas. Iš 20 rutulių išrinkti 2 rutulius galima:

$$n = C_{20}^2 = \frac{20 \cdot (20-1)}{2!} = \frac{20 \cdot 19}{1 \cdot 2} = 190 \text{ būdais.}$$

Pasirinkti du skirtingų spalvų rutulius galima $m = 12 \cdot 8 = 96$ būdais. Tikimybė, kad ištraukti du rutuliai bus skirtingų spalvų, lygi:

$P(A) = \frac{96}{190} = \frac{48}{95} \approx 0{,}51$; čia įvykis A – „ištraukti rutuliai yra skirtingų spalvų“.

Atsakymas. $\frac{48}{95} \approx 0{,}51$.

10 pavyzdys. Iš dėžės, kurioje yra 6 balti ir 3 juodi rutuliai, atsitiktinai išimami 2 rutuliai. Kokia tikimybė, kad abu rutuliai juodi ?

Sprendimas. Elementariųjų įvykių yra n: $n = C_9^2 = \frac{9 \cdot 8}{1 \cdot 2} = 36.$

Įvykis A – „atsitiktinai išimti abu juodi rutuliai". Palankių įvykiui A elementariųjų įvykių yra $m_A = C_3^2 = 3.$

Įvykio A tikimybė $P(A) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}.$ **Atsakymas.** $\frac{1}{12}.$

11 pavyzdys. Dėžėje yra 7 balti ir 5 juodi rutuliai. Atsitiktinai traukiami 3 rutuliai. Kokia tikimybė, kad ištraukti 2 balti ir 1 juodas rutulys ?

Sprendimas. Iš viso dėžėje yra 12 rutulių. Iš 12 rutulių išrinkti 3 rutulius galima $C_{12}^3 = \frac{12!}{3!9!} = \frac{10 \cdot 11 \cdot 12}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 220$ būdais.

Vadinasi, elementariųjų įvykių yra n = 220. Įvykis A – „atsitiktinai ištraukti 2 balti ir 1 juodas rutulys". Įvykiui A palankių elementariųjų įvykių yra $m_A = C_7^2 \cdot C_5^1 = 21 \cdot 5 = 105.$ Taigi įvykio A tikimybė $P(A) = \frac{105}{220} = \frac{21}{44}.$

Atsakymas. $\frac{21}{44}.$

12 pavyzdys. Grupė turistų, susidedanti iš penkiolikos vaikinų ir penkių merginų, burtu keliu nori išrinkti keturis žmones dalyvauti sporto varžybose su kita turistų grupe. Kokia tikimybė, kad komandoje bus du vaikinai ir dvi merginos?

Sprendimas. Tegul įvykis A – „išrinktoje komandoje yra du vaikinai ir dvi merginos". Šiuo atveju bandymas yra toks: „iš dvidešimties žmonių grupės burtų keliu renkami 4 žmonės". Kadangi rinkimas vyksta burtų keliu, tai visos bandymų baigtys (galimi įvykiai) yra vienodai tikėtinos (vienodai tikėtini) ir nesutaikomos (nesutaikomi). Visų galimų bandymo baigčių (visų galimų įvykių) skaičius $n = C_{20}^4$. Du vaikinus iš 15 galima pasirinkti C_{15}^2 būdais ir po kiekvieno tokio pasirinkimo dvi merginas iš 5 galima pasirinkti

C_5^2 būdais. Pagal kombinatorinę daugybos taisyklę 2 vaikinus ir 2 merginas galime pasirinkti $C_{15}^2 \cdot C_5^2$ būdais, t.y. įvykiui A palankių įvykių skaičius $m = C_{15}^2 \cdot C_5^2$. Ieškomoji tikimybė

$$P(A) = \frac{m}{n}, \qquad P(A) = \frac{C_{15}^2 \cdot C_5^2}{C_{20}^4} \approx 0{,}217.$$

Atsakymas. $\frac{C_{15}^2 \cdot C_5^2}{C_{20}^4} \approx 0{,}217$.

13 pavyzdys. Rinkdamas telefono numerį, abonentas užmiršo du paskutinius numerio skaitmenis ir atsimindamas tik, kad šie skaitmenys yra skirtingi, surinko juos atsitiktinai. Kokia tikimybė, kad abonentas surinko teisingą numerį?

Sprendimas. Du paskutiniuosius numerio skaitmenis galima surinkti A_{10}^2 būdų, t.y. tiek būdų, kiek yra gretinių iš 10 elementų 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 po 2. Vadinasi, jei bandymas yra „paskutiniųjų dviejų telefono numerio skaitmenų rinkimas“, tai galimų šio bandymo baigčių (visų atsitiktinių įvykių) skaičius $n = A_{10}^2$. Įvykiui A – „skaitmenys surinkti teisingai“ palankus yra tik vienas įvykis, t.y. viena bandymo baigtis, todėl $m = 1$. Įvykio tikimybė

$$P(A) = \frac{1}{A_{10}^2} = \frac{1}{10 \cdot 9} = \frac{1}{90}.$$

Atsakymas. $\frac{1}{90}$.

14 pavyzdys. Tarp 100 elektros lempučių yra 5 brokuotos. Kokia tikimybė, kad tarp trijų atsitiktinai paimtų lempučių visos tris lemputės yra nebrokuotos?

Sprendimas. Šiuo atveju bandymo „trijų elektros lempučių iš 100 atsitiktinis parinkimas“ galimų baigčių (visų galimų įvykių) skaičius $n = C_{100}^3$; visos baigtys yra vienodai tikėtinos, nes lemputės paimamos

atsitiktinai. Įvykiui A – „tarp 3 atsitiktinai paimtų lempučių visos trys yra nebrokuotos“ palankių įvykių skaičius $m = C_{95}^3$. Vadinasi,

$$P(A) = \frac{m}{n}; \qquad P(A) = \frac{C_{95}^3}{C_{100}^3} = \frac{95 \cdot 94 \cdot 93}{100 \cdot 99 \cdot 98} \approx 0{,}856.$$

Atsakymas. $P(A) \approx 0{,}856$.

15 pavyzdys. Į knygų lentyną atsitiktinai paimamos ir dedamos 4 istorijos ir 3 matematikos knygos. Kokia tikimybė, kad vieno ir to paties dalyko (istorijos arba matematikos) knygos bus sudėtos greta?

Sprendimas. Bandymo „7 knygų dėliojimas į lentyną“ galimų baigčių (visų galimų įvykių) skaičius $n = 7!$, nes 7 knygas išdėlioti lentynoje yra 7! būdų. Įvykiui A – „vieno ir to paties dalyko knygos sudėtos greta“ palankių įvykių skaičius yra $m = 2 \cdot 4! \cdot 3!$. Iš tikrųjų, 4 istorijos knygas galima sudėlioti į lentyną 4! būdais, o po kiekvieno tokio sudėliojimo 3 matematikos knygas galima sudėlioti 3! būdais. Be to, pačių knygų komplektus (istorijos arba matematikos) galima sudėti 2 būdais, t.y. pirmiausia gali būti sudėtos istorijos knygos, o po to matematikos arba pirmiausiai gali būti sudėtos matematikos, o po to istorijos knygos. Pagal kombinatorinę daugybos taisyklę ir gauname, kad $m = 2 \cdot 4! \cdot 3!$. Įvykio A tikimybė lygi $P(A) = \frac{2 \cdot 4! \cdot 3!}{7!} = \frac{2}{35}$. **Atsakymas.** $\frac{2}{35}$.

16 pavyzdys. Iš 40 klausimų, įeinančių į egzaminų bilietus, studentas išmoko 10. Kokia tikimybė, studentui ištraukti bilietą, kurio abu klausimus jis moka?

Sprendimas. Elementariųjų įvykių skaičius $n = C_{40}^2 = 780$, palankių įvykių skaičius $m = C_{10}^2 = 45$, todėl įvykio tikimybė $P(A) = \frac{45}{780} = \frac{3}{52}$.

Atsakymas. $\frac{3}{52}$.

17 pavyzdys. Devynios kortelės, pažymėtos skaitmenimis nuo 1 iki 9. Nesirenkant imamos keturios kortelės ir dedamos viena greta kitos. Gaunamas keturženklis skaičius. Kokia tikimybė, kad jis bus lyginis?

Sprendimas. Keturženklių skaičių iš skirtingų devynių skaitmenų galima sudaryti A_9^4 būdais, todėl elementariųjų įvykių skaičius $n = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6$.

Įvykiui A – „sudėtas lyginis keturženklis skaičius yra lyginis“ palankių įvykių yra $m = 4 \cdot A_8^3$ (tris pirmuosius skaitmenis galima pasirinkti A_8^3 būdais, o paskutinį – 4, nes yra 4 lyginiai skaičiai), $m = 4 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6$.

Įvykio A tikimybė $P(A) = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 4}{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} = \frac{4}{9}$. **Atsakymas.** $\frac{4}{9}$.

18 pavyzdys. Miesto futbolo turnyre dalyvauja 16 komandų, suskirstytų į du pogrupius po 8 komandas kiekvienoje. Kokia tikimybė, kad praeitame turnyre I ir II vietas užėmusios komandos žais tame pačiame pogrupyje?

Sprendimas. Iš 16 komandų galime sudaryti C_{16}^8 pogrupius. 16 komandų suskirstyti į du pogrupius po 8 komandas galime $\frac{1}{2}C_{16}^8$ būdais, todėl elementariųjų įvykių skaičius $n = \frac{1}{2}C_{16}^8$. Jei I ir II vietą užėmusios komandos priklauso vienam pogrupiui, tai kitas 6 to pogrupio komandas galima parinkti $m = C_{14}^6$ būdais. Įvykio tikimybė

$$P(A) = \frac{C_{14}^6}{\frac{1}{2}C_{16}^8} = \frac{14!}{6! \cdot 8!} \cdot \frac{2 \cdot 8! \cdot 8!}{16!} = \frac{7}{15}.$$

Atsakymas. $\frac{7}{15}$.

19 pavyzdys. Metame lošimo kauliuką. Raide k pažymime atsivertusių kauliuko akučių skaičių ir nagrinėsime kvadratinį trinarį $x^2 + 2kx + 9$. Raskite šių įvykių tikimybes:

A – „kvadratinio trinario grafikas nekerta abscisių ašies";

B – „kvadratinio trinario grafikas kerta abscisių ašį dviejuose taškuose";

C – „kvadratinio trinario grafikas liečia abscisių ašį".

Sprendimas. Elementariųjų įvykių skaičius n = 6.

1) Kvadratinio trinario grafikas nekerta abscisių ašies, kai D < 0, t.y. $k^2 - 9 < 0$, $-3 < k < 3$. Palankių įvykių skaičius m = 2, nes k gali įgyti reikšmes 1 ir 2. Įvykio A tikimybė $P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

2) Grafikas kerta abscisių ašį, kai D > 0. Vadinasi, $k^2 - 9 > 0$, t.y. $k < -3$ arba $k > 3$. Iš čia m = 3, nes k gali įgyti reikšmes 4, 5, 6, todėl $P(B) = \frac{1}{2}$.

3) Grafikas liečia abscisių ašį, kai D = 0, todėl $k = \pm 3$, ir $P(C) = \frac{1}{6}$.

Atsakymas. $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{6}$.

20 pavyzdys. Dėžėje yra 10 rutulių. Tikimybė, kad du atsitiktinai ištraukti rutuliai yra balti, lygi $\frac{2}{15}$. Kiek dėžėje baltų rutulių?

Sprendimas. Sakykime, kad baltų rutulių dėžėje yra k.

Elementariųjų įvykių skaičius $n = C_{10}^2 = 45$, o palankių įvykių skaičius $m = C_k^2 = \frac{k!}{2!(k-2)!} = \frac{(k-1)k}{2}$. Kadangi $P(A) = \frac{2}{15}$, tai galime sudaryti lygtį $\frac{(k-1)k}{90} = \frac{2}{15}$. Išsprendę lygtį, randame, kad $k = 4$.

Atsakymas. 4.

4. Priešingo įvykio tikimybė

Jei įvykiui A **priešingas įvykis** yra $\overline{A}$, tai

$$\boxed{P(\overline{A}) = 1 - P(A)} \quad \text{arba} \quad \boxed{P(A) = 1 - P(\overline{A}).}$$

Iš tikrųjų, jei galimų įvykių yra n, o įvykiui A palankių elementariųjų įvykių yra m, tai įvykiui $\overline{A}$ palankių elementariųjų įvykių yra n – m.

Vadinasi, $P(\overline{A}) = \frac{n-m}{n} = 1 - \frac{m}{n} = 1 - P(A)$. Visada $P(A) + P(\overline{A}) = 1$.

Uždavinių sprendimo pavyzdžiai

1 pavyzdys. Gaminant detalę, atliekama keletas operacijų. Tikimybė gauti detalę, neatitinkančią standartų, lygi 0,01. Kokia tikimybė pagaminti gerą detalę?

Sprendimas. Pažymime įvykius:

A – „pagaminta detalė atitinka standartus“,

$\overline{A}$ – „pagaminta detalė neatitinka standartų“.

Turime $P(\overline{A}) = 0{,}01$. Tada $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - 0{,}01 = 0{,}99$.

Atsakymas. 0,99.

2 pavyzdys. Metame lošimo kauliuką. Kokia tikimybė, kad iškrito mažiau kaip šeši taškai?

Sprendimas. Pažymėkime įvykius:

A – „iškrito mažiau kaip šeši taškai“,

$\overline{A}$ – „iškrito šeši taškai“.

Įvykiui $\overline{A}$ – palankus tik vienas elementarusis įvykis, todėl $P(\overline{A}) = \frac{1}{6}$.

Vadinasi, $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$.

Šis pavyzdys rodo, kad, ieškant įvykio tikimybės, kartais patogiau rasti priešingo įvykio tikimybę. **Atsakymas.** $\frac{5}{6}$.

3 pavyzdys. Atsitiktinai paimamas triženklis skaičius. Kokia tikimybė, kad bent du jo skaitmenys bus skirtingi?

Sprendimas. Pažymėkime įvykius:

A – „pasirinkto triženklio skaičiaus bent du skaitmenys yra skirtingi",

$\overline{A}$ – „pasirinkto triženklio skaičiaus visi skaitmenys skirtingi".

Kadangi visi triženkliai skaičiai yra nuo 100 iki 999, tai atsitiktinai parinkti vieną iš šių skaičių yra 900 būdų, t.y. galimų bandymo elementariųjų įvykių skaičius $n = 900$. Šiame uždavinyje yra paprasčiau apskaičiuoti įvykiui A priešingo įvykio $\overline{A}$ tikimybę, o tik po to rasti mus dominančio įvykio A tikimybę. Įvykiui $\overline{A}$ palankių elementariųjų įvykių skaičius $m = A_{10}^3 - A_9^2 = 10 \cdot 9 \cdot 8 - 9 \cdot 8 = 9^2 \cdot 8$, todėl $P(\overline{A}) = \frac{9^2 \cdot 8}{900} = 0{,}72$.

Mus dominanti tikimybė $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 0{,}28$.

Atsakymas. 0,28.

4 pavyzdys. Iš 36 kortų kaladės, kurioje yra 4 tūzai, atsitiktinai ištrauktos 5 kortos. Kokia tikimybė, kad tarp jų yra bent vienas tūzas?

Sprendimas. Įvykis A – „tarp iš kortų kaladės atsitiktinai ištrauktų penkių kortų yra bent vienas tūzas". Priešingas įvykis $\overline{A}$ - „tarp ištrauktų penkių kortų nėra nė vieno tūzo".

Elementariųjų įvykių skaičius $n = C_{36}^5$. Palankių įvykiui $\overline{A}$ elementariųjų įvykių yra $m = C_{32}^5$, todėl $P(\overline{A}) = \frac{C_{32}^5}{C_{36}^5}$.

Vadinasi, $P(A) = 1 - \frac{C_{32}^5}{C_{36}^5} = \frac{C_{36}^5 - C_{32}^5}{C_{36}^5}$. **Atsakymas.** $\frac{C_{36}^5 - C_{32}^5}{C_{36}^5}$.

Uždaviniai savarankiškam darbui

1. Metame lošimo kauliuką. Kokia tikimybė įvykių:
A – „atsivertė trys akys“;
B – „atsivertė daugiau kaip trys akys“;
C – „atsivertė mažiau kaip trys akys“?

2. Dėžėje yra 6 balti ir 8 raudoni rutuliai. Atsitiktinai traukiami 5 rutuliai. Kokia tikimybė, kad 2 iš jų bus balti, o 3 – raudoni?

3. Atsitiktinai paimtas pirminis skaičius nedidesnis už 20. Kokia tikimybė, kad jis turės pavidalą: 1) $4x + 1$; 2) $4x + 3$; 3) $6x + 5$?

4. Vienoje klasėje tarp 20 mokinių yra 4 sportininkai, kitoje tarp 24 mokinių yra 8 sportininkai. Atsitiktinai parenkamas vienas mokinys. Kam lygi tikimybė, kad jis yra sportininkas?

5. Iš viso domino rinkinio traukiamas vienas kauliukas. Raskite tikimybes įvykių:
A – „taškų suma lygi 7“;
B – „taškų suma mažesnė už 8“;
C – „ištrauktas kauliukas yra dublis“ (abiejuose kauliuko skyreliuose yra vienodas taškų skaičius);
D – „abiejose kauliuko skyreliuose yra vienodas lyginis taškų skaičius“.

6. Metamos 3 monetos: 1 cento, 2 centų, 5 centų. Raskite tikimybes įvykių: A – „herbas atvirto daugiau kaip ant vienos monetos“;
B – „atvirtusių centų suma didesnė už 2“;
C – „atvirtusių centų suma mažesnė už 5“;
D – „atvirtusių centų suma didesnė už 5“.

7. Iš šešių abėcėlės raidžių sudėtas žodis LYGTIS. Nemokantis skaityti vaikas išbarstė raides, o paskui atsitiktinai jas surinko. Kokia tikimybė, kad jis vėl sudėjo šį žodį?

8. Atskirose kortelėse užrašyti natūralieji skaičiai nuo 1 iki 20. Kokia tikimybė, kad atsitiktinai paimtoje kortelėje užrašytas skaičius bus:

1) skaičiaus 5 kartotinis;
2) skaičiaus 3 kartotinis;
3) pirminis skaičius;
4) sudėtinis skaičius;
5) nei pirminis, nei sudėtinis?

9. Kokia tikimybė, kad iš naujo 2001 metų kalendoriaus atsitiktinai išplėštame lapelyje esantis skaičius:

1) dalus iš 6;
2) dalus iš 5;
3) dalus iš 7;
4) bus 13 – osios dienos;
5) bus 29 – osios dienos?

10. Miesto telefonų numeriai yra penkiaženkliai, neprasidedantys nuliu. Atsitiktinai parinktas vienas telefono numeris. Kokia tikimybė, kad jo visi skaitmenys nelyginiai?

11. Dėžutėje yra 5 kortelės, sunumeruotos skaičiais 1, 2, 3, 4, 5. Atsitiktinai ištraukiama viena kortelė, užrašomas jos numeris ir kortelė grąžinama į dėžutę. Po to atsitiktinai traukiama kita kortelė ir užrašomas jos numeris. Raskite tikimybes įvykių:

A – „pirmasis skaičius didesnis už antrąjį“;
B – „abu skaičiai lygūs“;

C – „abu skaičiai nelyginiai";

D – „skaičių suma lygi 8";

E – „skaičių suma lygi 6".

12. Iš dėžės, kurioje yra 6 raudoni ir 5 mėlyni rutuliai, atsitiktinai traukiami 2 rutuliai .

1) Kokia tikimybė, kad abu ištraukti rutuliai raudoni ?
2) Kokia tikimybė, kad abu rutuliai mėlyni ?
3) Kokia tikimybė, kad jie skirtingų spalvų ?

13. Baigiamojo matematikos egzamino darbai užkoduoti skaičiais nuo 1 iki 56. Atsitiktinai paimtas vienas darbas.

1. Raskite tikimybes įvykių:

A – „darbo kodas mažesnis už 23";

B – „darbo kodas didesnis už 41";

C – „darbo kodas dalus iš 7";

D – „darbo kodas dalus iš 5 arba iš 4".

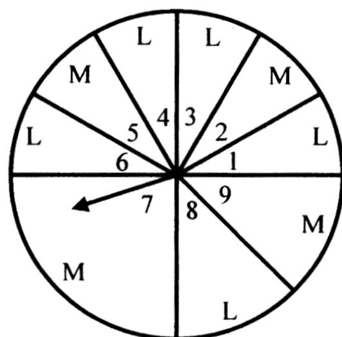
2. Suformuluokite šiems įvykiams priešingus įvykius ir raskite jų tikimybes.

14. Spyną galima atrakinti tik surinkus tam tikrą šifrą – penkiaženklį skaičių, kurį galima sudaryti iš septynių skaitmenų 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Kokia tikimybė atrakinti spyną, surinkus šifrą atsitiktinai?

15. Knygų lentynoje atsitiktinai sudėtos 4 literatūros ir 3 istorijos knygos. Kokia tikimybė, kad visos vieno dalyko knygos bus greta?

16. Duotos 2 cm, 5cm, 6 cm ir 10 cm ilgio atkarpos. Kokia tikimybė, kad atsitiktinai paėmus tris atkarpas bus galima nubraižyti trikampį?

17. Suktuko skritulys padalytas į 9 sektorius, kurie sunumeruoti nuo 1 iki 9, kai $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3 = \angle 4 = \angle 5 = \angle 6 = 30^\circ$, $\angle 7 = 90^\circ$, $\angle 8 = \angle 9 = 45^\circ$. Raskite tikimybes įvykių:



A – „įsukta suktuko rodyklė sustojo bet kurioje skritulio vietoje";

B – „įsukta suktuko rodyklė sustojo dešiniojo pusskritulio vietoje";

C – „suktuko rodyklė sustojo M raide pažymėtame sektoriuje".

18. Dėžėje yra 9 vienodi rutuliai: 6 balti ir 3 geltoni. Nežiūrint imama po vieną rutulį. Paimtieji rutuliai dedami į kitą dėžę. Kokia tikimybė, kad trečias rutulys yra geltonas, jeigu žinoma, kad pirmieji du rutuliai buvo skirtingų spalvų?

19. Ridenami du lošimo kauliukai. Kokia tikimybė, kad atsiversiančių akučių suma bus lygi: 1) 11; 2) 7; 3) arba 7, arba 11?

20. Moneta metama tris kartus. Raskite tikimybes įvykių:

A – „iškrito ne mažiau kaip du herbai";

B – „iškrito daugiau kaip du herbai";

C – „iškrito ne daugiau kaip du herbai";

D – „iškrito lygiai vienas skaičius";

E – „iškrito vienodai herbų ir skaičių".

21. Lentelėje pateikti duomenys, kiek mergaičių ir berniukų mokosi 10 – 12 klasėse.

Klasė	10	11	12
Mergaičių skaičius	52	64	86
Berniukų skaičius	30	28	24

Atsitiktinai išrenkamas vienas mokinys. Apskaičiuokite šių įvykių tikimybes: A – „išrinktas berniukas";

B – „išrinkta 11 klasės mergaitė";

C – „išrinktas 12 klasės berniukas".

22. Kauliukas metamas du kartus ir užrašomas dviženklis skaičius ab, kur a – pirmą kartą iškritusių akučių skaičius, o b – antrą kartą iškritusių akučių skaičius. Kokia tikimybė, kad gauto dviženklio skaičiaus skaitmenys a ir b tenkina sąlygą: 1) $a < b$; 2) $2a = b$; 3) $a^2 = b$; 4) $a + b = 5$; 5) $9 \le a + b \le 12$; 6) $a - b = 1$.

23. Kokia tikimybė, kad atsitiktinai paėmus iš žodžių „dama“ ir „mama“ po vieną raidę, jos bus: 1) vienodos; 2) skirtingos?

24. Iš žodžio SIGIS raidžių atsitiktinai imamos trys raidės. Kokia tikimybė, kad bus sudėtas žodis GIS?

25. Kokia tikimybė, kad atsitiktinai užrašius triženklį skaičių du jo skaitmenys bus vienodi?

26. 10 žmonių atsitiktinai susodinami prie dešimtviečio stalo. Kokia tikimybė, kad Petras ir Povilas sėdės greta?

27. Dėžėje yra žalios ir mėlynos spalvos kaladėlės. Tikimybė, kad ištrauktos dvi kaladėlės bus mėlynos spalvos, lygi $\frac{5}{14}$. Kiek dėžėje buvo kaladėlių, jei mėlynos spalvos kaladėlių joje buvo 5?

28. Iš 20 mergaičių ir 18 berniukų atsitiktinai parenkami 5 mokiniai dalyvauti konferencijoje. Kokia tikimybė įvykių:

A – „visi parinktieji mokiniai – berniukai“;

B – „visi parinktieji mokiniai – mergaitės“.

29. 36 kortų kaladę padalijame pusiau. Kokia tikimybė, kad kiekvienoje krūvelėje yra po 2 tūzus?

30. Dėžėje yra 90 gerų ir 10 sugadintų detalių. Kokia tikimybė, kad tarp 10 atsitiktinai išimtų detalių nebus nė vienos sugadintos?

5. Nesutaikomų įvykių sumos tikimybė

Nesutaikomų įvykių A ir B sumos tikimybė yra lygi šių įvykių tikimybių sumai, t.y.

$$P(A + B) = P(A) + P(B).$$

Ši formulė teisinga n poromis nesutaikomų įvykių $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ sumai, t.y.

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n).$$

Jei įvykiai $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ sudaro pilną įvykių grupę (yra poromis nesutaikomi, o suma yra būtinasis įvykis), tai

$$P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) = 1.$$

1 pavyzdys. Dėžėje yra 5 raudoni, 2 mėlyni ir 3 žali rutuliai. Kokia tikimybė, kad atsitiktinai ištrauktas rutulys yra mėlynas arba žalias?

Sprendimas. Įvykis A – „ištrauktas mėlynas rutulys“; įvykis B – „ištrauktas žalias rutulys“; įvykis A + B – „ištrauktas mėlynas arba žalias rutulys“.

$$P(A) = \frac{2}{10} = 0{,}2, \qquad P(B) = \frac{3}{10} = 0{,}3.$$

Įvykiai A ir B yra nesutaikomi, todėl

$$P(A + B) = P(A) + P(B) = 0{,}2 + 0{,}3 = 0{,}5.$$

Atsakymas. 0,5.

2 pavyzdys. Karinės mokyklos kursantas laiko šaudymo į taikinį įskaitą. Įskaita laikoma išlaikyta, jei kursantas gauna pažymį, ne mažesnį už 4. Kokia tikimybė kursantui išlaikyti egzaminą, jei žinoma, kad tikimybė už šaudymą gauti pažymį 5 lygi 0,3, o tikimybė gauti pažymi 4 lygi 0,5?

Sprendimas. Pažymėkime įvykius:

A – „už šaudymą gautas pažymys 5“;

B – „už šaudymą gautas pažymys 4”;

A + B – „už šaudymą gautas pažymys 5 arba 4, t.y. įskaita išlaikyta“.

Kadangi įvykiai A ir B nesutaikomi, tai

$$P(A + B) = P(A) + P(B) = 0{,}3 + 0{,}5 = 0{,}8.$$

Atsakymas. 0,8.

3 pavyzdys. Loterijoje yra 1000 bilietų. iš jų 1 bilietas išlošia 500 litų, 10 bilietų – po 100 litų, 50 bilietų – po 20 litų ir 100 bilietų – po 5 litus, o likusieji nieko neišlošia. Martynas nusipirko vieną bilietą. Kokia tikimybė, kad jis išloš ne mažiau kaip 20 litų?

Sprendimas. Pažymėkime įvykius:

A – „išlošia ne mažiau kaip 20 litų";

A_1 – „išlošia 20 litų";

A_2 – „išlošia 100 litų";

A_3 – „išlošia 500 litų".

Įvykiai A_1, A_2, A_3 yra nesutaikomi ir $A = A_1 + A_2 + A_3$, todėl $P(A) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3)$.

Kadangi

$$P(A_1) = \frac{50}{1000} = 0{,}05\,; \quad P(A_2) = \frac{10}{1000} = 0{,}01\,; \quad P(A_3) = \frac{1}{1000} = 0{,}001\,;$$

tai $P(A) = 0{,}05 + 0{,}01 + 0{,}001 = 0{,}061$. **Atsakymas**. 0,061.

4 pavyzdys. Iš 10 loterijos bilietų, tarp kurių 2 laimingi, atsitiktinai ištraukiami 5 bilietai. Kokia tikimybė, kad tarp ištrauktųjų bus bent vienas bilietas laimingas?

Sprendimas. Elementariųjų įvykių skaičius $n = C_{10}^5$. Tarp ištrauktųjų bilietų gali būti vienas laimingas ir vienas nelaimingas, todėl $m_1 = C_2^1 \cdot C_8^4$, arba gali būti abu bilietai laimingi, todėl $m_2 = C_2^2 \cdot C_8^3$. Įvykio tikimybė

$$P(A) = \frac{C_2^1 \cdot C_8^4}{C_{10}^5} + \frac{C_2^2 \cdot C_8^3}{C_{10}^5}; \quad P(A) = \frac{5}{9} + \frac{2}{9} = \frac{7}{9}.$$

Atsakymas. $\frac{7}{9}$.

5 pavyzdys. Dėžėje yra 12 baltų ir 8 juodi vienodo didumo rutuliai. Nesirenkant išimami aštuoni rutuliai. Kokia tikimybė, kad juodų rutulių išimta ne daugiau kaip trys?

Sprendimas. Elementariųjų įvykių skaičius $n = C_{20}^8$. Pažymime įvykius: A_1 – „išimti trys juodi rutuliai";

A_2 – „išimti du juodi rutuliai";

A_3 – „išimtas vienas juodas rutulys";

A_4 – „išimti tik balti rutuliai".

Palankių įvykiui A_1 skaičius $m_1 = C_8^3 \cdot C_{12}^5$; palankių įvykiui A_2 skaičius $m_2 = C_8^2 \cdot C_{12}^6$; palankių įvykiui A_3 skaičius $m_3 = C_8^1 \cdot C_{12}^7$; ir palankių įvykiui A_4 skaičius $m_4 = C_{12}^8$.

Įvykiai A_1, A_2, A_3, A_4 yra nesutaikomi, todėl $A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4$.

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + P(A_4) = \frac{C_8^3 \cdot C_{12}^5 + C_8^2 \cdot C_{12}^6 + C_8^1 \cdot C_{12}^7 + C_{12}^8}{C_{20}^8}$$

6. Sutaikomų įvykių sumos tikimybė

Sutaikomų įvykių A ir B sumos tikimybė lygi šių įvykių tikimybių sumai be jų sandaugos tikimybės (be tikimybės abiems įvykiams įvykti kartu), t.y.

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

1 pavyzdys. Metamos dvi monetos. Kokia tikimybė, kad bent vienos iš jų iškris herbas?

Sprendimas. Pažymėkime įvykius:

A – „iškrito herbas, metus pirmąją monetą";

B – „iškrito herbas, metus antrąją monetą".

Reikia apskaičiuoti įvykio $C = A + B$ tikimybę. Kadangi A ir B yra sutaikomi įvykiai, tai $P(C) = P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$.

Metant monetas, galimi atvejai HH, SS, SH, HS, todėl

$$P(A) = \frac{1}{2}, \qquad P(B) = \frac{1}{2}, \qquad P(AB) = \frac{1}{4}.$$

Vadinasi, $P(C) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$. **Atsakymas.** $\frac{3}{4}$.

2 pavyzdys. Du šauliai nepriklausomai vienas nuo kito šauna į tą patį taikinį. Pirmojo pataikymo tikimybė lygi 0,8, antrojo – 0,6. Kokia tikimybė, kad į taikinį pataikys bent vienas šaulys?

Sprendimas. Pažymėkime įvykius:

A – „pataikė pirmasis šaulys";

B – „pataikė antrasis šaulys".

Įvykiai A ir B yra sutaikomi, jie vyksta kartu, t.y. įvykis AB reiškia, kad „abu šauliai pataikė į taikinį".

Kadangi $P(A) = 0{,}8$, $P(B) = 0{,}6$, o $P(AB) = 0{,}6 \cdot 0{,}8 = 0{,}48$, tai $P(A + B) = 0{,}8 + 0{,}6 - 0{,}48 = 0{,}92$. **Atsakymas.** 0,92.

3 pavyzdys. Metami du kauliukai. Kokia tikimybė, kad bent viename iš jų iškris 6 akys?

Sprendimas. Pažymėkime įvykius:

A – „iškrito 6 akys, metus pirmąjį kauliuką";

B – „iškrito 6 akys, metus antrąjį kauliuką".

Reikia apskaičiuoti įvykio $C = A + B$ tikimybę:

$P(C) = P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$.

$$P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}, \qquad P(B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}, \qquad P(AB) = \frac{1}{36}.$$

Vadinasi, $P(C) = \frac{11}{36}$. **Atsakymas.** $\frac{11}{36}$.

4 pavyzdys. Iš natūraliųjų skaičių eilės nuo 1 iki 1000 atsitiktinai imamas skaičius. Kam lygi tikimybė, kad jis dalus iš 3 arba iš 4?

Sprendimas. Elementariųjų įvykių skaičius $n = 1000$. Tarp skaičių nuo 1 iki 1000 dalių iš 3 yra 333 skaičiai $\left(1 \le 3m \le 1000, \quad \frac{1}{3} \le m \le 333\frac{1}{3}\right)$, todėl palankių įvykių skaičius $m_1 = 333$. Tarp šių skaičių dalių iš 4 yra 250, todėl $m_2 = 250$.

Pažymime įvykius:

A – „skaičius dalus iš 3";

B – „skaičius dalus iš 4";

AB – „skaičius dalus iš 12".

Įvykiai A ir B yra sutaikomieji, jie kartu vyks tada, kai skaičius bus dalus iš 12, o tokių skaičių yra 83.

Kadangi $P(A)=\frac{333}{1000}$, $P(B)=\frac{250}{1000}$, $P(AB)=\frac{83}{1000}$, tai

$P(A+B)=\frac{333}{1000}+\frac{250}{1000}-\frac{83}{1000}=0{,}5$. **Atsakymas.** 0,5.

Uždaviniai savarankiškam darbui

1. Metami du lošimo kauliukai. Kokia tikimybė, kad atvirtusių akučių suma lygi 4 arba 5?

2. Imamas domino kauliukas. Kokia tikimybė, kad domino akučių skaičius bus 5 arba 7?

3. Matematikos egzaminą sudaro 30 algebros, 20 geometrijos, 25 analizės pradmenų ir 15 aritmetikos klausimų. Kokia tikimybė, kad moksleivis atsitiktinai ištrauks: 1) algebros arba geometrijos klausimą; 2) analizės pradmenų arba aritmetikos klausimą?

4. Knygoje yra 300 puslapių. Kokia tikimybė, kad atsitiktinai atversto puslapio numeris yra skaičiaus 20 arba 25 kartotinis?

5. Dėžutėje yra 4 kortelės, sunumeruotos skaičiais 1, 2, 3, 4. Atsitiktinai ištraukiama viena kortelė, užrašomas jos numeris ir kortelė grąžinama į dėžutę. Po to atsitiktinai traukiama kita kortelė ir užrašomas jos numeris. Kokia tikimybė, kad gautojo dviženklio skaičiaus skaitmenų suma bus: 1) 3 arba 4; 2) 5 arba 7?

6. Dėžutėje yra 12 raudonų, 6 žali ir 10 juodų pieštukų. Kam lygi tikimybė įvykio A – „ištrauktas pieštukas bus raudonas arba juodas"?

7. Dėžėje yra 6 juodi ir 4 mėlyni rutuliai. Nesirenkant išimami 5 rutuliai. Kokia tikimybė, kad mėlynų rutulių išimta ne daugiau kaip du?

8. 5 berniukai ir 7 mergaitės norėjo eiti į kiną, bet buvo gauti tik 4 bilietai. Jie turi bilietus pasiskirstyti atsitiktinai. Raskite tikimybes įvykių:

A – „bilietus gavo 2 berniukai ir 2 mergaitės";

B – „bilietus gavo daugiau berniukų, negu mergaičių";

C – „bilietus gavo daugiau mergaičių, negu berniukų".

9. Taikinys turi 4 sektorius S_1, S_2, S_3, S_4. Į juos pataikęs šaulys gauna 1, 2, 3, 4 taškus. Pataikymo į sektorius tikimybės lygios: $P(S_1) = 0{,}26$, $P(S_2) = 0{,}28$, $P(S_3) = 0{,}24$, $P(S_4) = 0{,}12$. Tikimybė, kad šaulys nepataikys į taikinį, lygi 0,1. Raskite šių įvykių tikimybes:

A – „šaulys negaus taškų";

B – „šaulys gaus ne mažiau kaip vieną tašką";

C – „šaulys gaus ne daugiau kaip tris taškus";

D – „šaulys gaus nelyginį skaičių taškų".

10. Piniginėje – daiktinėje loterijoje yra 1000 bilietų: 120 bilietų laimi piniginius, o 80 – daiktinius prizus. Kokia tikimybė, perkant vieną bilietą, laimėti kokį nors prizą?

11. Vienoje klasėje tarp 35 mokinių yra 4 pirmūnai, o kitoje tarp 39 mokinių yra 6 pirmūnai. Atsitiktinai pasirenkame po vieną mokinį iš kiekvienos klasės. Raskite tikimybes įvykių:

A – „abu mokiniai pirmūnai";

B – „vienas mokinys pirmūnas, o kitas – ne".

12. Metami du lošimo kauliukai. Kokia tikimybė, kad bent vieno iš jų iškris 6 akutės?

13. Metami du lošimo kauliukai. Apskaičiuokite įvykio, kad bent vieno kauliuko atsivertė ta pusė, kurioje ne daugiau kaip dvi akutės, tikimybę.

14. Pirmosios raketos pataikymo į taikinį tikimybė yra 0,4, antrosios - 0,6. Kokia tikimybė, kad bent viena raketa pataikys į taikinį, jei jos paleidžiamos nepriklausomai viena nuo kitos?

15. Iš 30 sporto mokyklos moksleivių 12 žaidžia krepšinį, 15 – tinklinį, 5 – ir krepšinį, ir tinklinį, o likusieji lanko kitų sporto šakų treniruotes.

Kokia tikimybė, kad atsitiktinai paklaustas moksleivis žaidžia tik krepšinį arba tik tinklinį?

16. Tikimybė, kad Jurga išlaikys matematikos egzaminą, lygi 0,7, kad neišlaikys rusų kalbos egzamino – 0,1. Kokia tikimybė, kad Jurga išlaikys bent vieną egzaminą?

7. Nepriklausomų įvykių sandaugos tikimybė

Sakykime, įvykiai A ir B yra nepriklausomi. Tada įvykio A tikimybė P(A) nepriklauso nuo to, ar įvyko, ar neįvyko įvykis B. Analogiškai, įvykio B tikimybė nepriklauso nuo to, ar įvyko, ar neįvyko įvykis A. Sutaikomų **nepriklausomų įvykių A ir B sandaugos tikimybę** randame sudauginę atskirų įvykių tikimybes, t.y.

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B).$$

Nesutaikomų įvykių sandaugos tikimybė yra lygi nuliui.

1 pavyzdys. Metama moneta ir lošimo kauliukas. Kokia tikimybė, kad iškris herbas, o kauliuko atsivertusių akučių skaičius bus lyginis?

Sprendimas. Pažymėkime įvykius:

A – „iškrito herbas";

B – „iškrito lyginis akučių skaičius";

AB – „iškrito herbas ir lyginis akučių skaičius".

$$P(A) = \frac{1}{2}, \qquad P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{3}.$$

Kadangi įvykiai A ir B – nepriklausomi, tai: $P(AB) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$.

Atsakymas. $\frac{1}{6}$.

2 pavyzdys. Metami 3 lošimo kauliukai. Kokia tikimybė, kad visuose trijuose kauliukuose iškris 6 akutės?

Sprendimas. Pažymime įvykius:

A – „ pirmajame kauliuke iškrito 6 akutės “;

B – „ antrajame kauliuke iškrito 6 akutės “;

C – „ trečiajame kauliuke iškrito 6 akutės “.

Įvykiai A, B, C – nepriklausomi ir sutaikomi, todėl:

$$P(ABC) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C).$$

Kadangi $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{6}$, tai $P(ABC) = \frac{1}{216}$.

Atsakymas. $= \frac{1}{216}$.

3 pavyzdys. Du medžiotojai vienu metu ir nepriklausomai vienas nuo kito šauna į zuikį. Zuikis laikomas nušautu, jeigu pataiko bent vienas medžiotojas. Kokia tikimybė, kad zuikis bus nušautas, jeigu medžiotojų pataikymo tikimybės lygios 0,8 ir 0,75?

Sprendimas. Pažymėkime įvykius:

A – „zuikis nušautas“;

Įvykiui A priešingas įvykis $\overline{A}$ – „zuikis nenušautas“;

B – „į zuikį pataiko pirmasis medžiotojas“;

C – „į zuikį pataiko antrasis medžiotojas“;

BC – „į zuikį pataiko pirmasis ir antrasis medžiotojas“.

Iš pavyzdžio sąlygos išplaukia, kad įvykiai B ir C yra nepriklausomi, o jų tikimybės tokios: $P(B) = 0{,}8$; $P(C) = 0{,}75$.

Pažymėkime įvykiams B ir C bei įvykiui BC priešingus įvykius:

$\overline{B}$ – „į zuikį pirmasis medžiotojas nepataiko“;

$\overline{C}$ – „į zuikį antrasis medžiotojas nepataiko“;

$\overline{BC}$ – „į zuikį nepataiko nei pirmasis, nei antrasis medžiotojas“.

Įvykiai $\overline{B}$ ir $\overline{C}$ taip pat nepriklausomi; sandauga $\overline{BC}$ yra įvykis $\overline{A}$, todėl: $P(\overline{A}) = P(\overline{BC}) = P(\overline{B})\,P(\overline{C}) = (1 - P(B))(1 - P(C)) =$

$= (1 - 0{,}8)(1 - 0{,}75) = 0{,}2 \cdot 0{,}25 = 0{,}05.$

Vadinasi, $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 0{,}95.$

Matome, kad nors medžiotojai nėra labai taiklūs, tačiau jų bendri veiksmai gali būti pakankamai sėkmingi. **Atsakymas.** 0,95.

4 pavyzdys. Pirmoje dėžėje yra 12 detalių, iš jų 5 nestandartinės. Antroje dėžėje yra 20 detalių, iš jų 4 nestandartinės. Iš kiekvienos dėžės atsitiktinai išimama viena detalė. Kokia tikimybė, kad abi detalės nestandartinės?

Sprendimas. Pažymime įvykius:

A – „iš pirmos dėžės atsitiktinai išimta detalė yra nestandartinė“;

B – „iš antros dėžės atsitiktinai išimta detalė yra nestandartinė“;

C – “iš abiejų dėžių atsitiktinai išimtos detalės yra nestandartinės“.

Kadangi $P(A) = \frac{5}{12}$, $P(B) = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$, tai

$P(C) = P(A) \cdot P(B) = \frac{5}{12} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{12}.$ **Atsakymas.** $\frac{1}{12}$.

5 pavyzdys. Šaulys pataiko į taikinį su tikimybe $\frac{1}{3}$. Jis šauna 3 kartus.

Apskaičiuokite tikimybes šių įvykių:

A – „šaulys nepataikė daugiau kaip 2 kartus“;

B – „šaulys pataikė vieną kartą“;

C – “šaulys pataikė du kartus”;

D – “šaulys pataikė ne mažiau kaip du kartus”.

Sprendimas. Pažymėkime P – „pataikė“, $\overline{P}$ – „nepataikė“ ir sudarykime elementariųjų įvykių aibę:

1) $(P\,P\,P)$; 2) $(P\,P\,\overline{P})$; 3) $(P\,\overline{P}\,P)$; 4) $(\overline{P}\,P\,P)$;

5) $(\overline{P}\,\overline{P}\,\overline{P})$; 6) $(\overline{P}\,\overline{P}\,P)$; 7) $(\overline{P}\,P\,\overline{P})$; 8) $(P\,\overline{P}\,\overline{P})$.

Kadangi šaulys pataiko į taikinį su tikimybe $\frac{1}{3}$, tai nepataikymo tikimybė – $\frac{2}{3}$.

Įvykis A reiškia, kad šaulys nepataikė tris kartus, todėl

$$P(A)=\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{8}{27}.$$

Įvykis B reiškia, kad šaulys pataikė, iššovęs pirmą kartą, arba antrą kartą, arba trečią kartą, todėl:

$$P(B)=\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{12}{27} \quad \text{(pagal 6), 7), 8)).}$$

$$P(C)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{6}{27} \quad \text{(pagal 2), 3), 4)).}$$

Įvykis D reiškia, kad šaulys pataikė visus tris kartus, arba pataikė du kartus, todėl:

$$P(D)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}+P(C)=\frac{1}{27}+\frac{6}{27}=\frac{7}{27}.$$

Atsakymas. $P(A)=\frac{8}{27}$; $P(B)=\frac{12}{27}$; $P(C)=\frac{6}{27}$; $P(D)=\frac{7}{27}$.

6 pavyzdys. Tikimybė, kad studentas išlaikys pirmą egzaminą, lygi 0,9, antrą – 0,85, trečią – 0,8. Kokia tikimybė studentui išlaikyti ne mažiau kaip du egzaminus?

Sprendimas. Pažymėkime įvykius:

A_1 – „išlaikė pirmą egzaminą“;

A_2 – „išlaikė antrą egzaminą“;

A_3 – „išlaikė trečią egzaminą“;

$\overline{A_1}$ – „neišlaikė pirmo egzamino“;

$\overline{A_2}$ – „neišlaikė antro egzamino“;

$\overline{A_3}$ – „neišlaikė trečio egzamino“.

B – „išlaikė ne mažiau kaip du egzaminus“.

Nagrinėsime įvykius:

1) $(A_1, A_2, \overline{A_3})$; 2) $(A_1, \overline{A_2}, A_3)$; 3) $(\overline{A_1}, A_2, A_3)$; 4) (A_1, A_2, A_3);

Kadangi $P(A_1) = 0{,}9$; $P(A_2) = 0{,}85$; $P(A_3) = 0{,}8$; $P(\overline{A_1}) = 0{,}1$; $P(\overline{A_2}) = 0{,}15$; $P(\overline{A_3}) = 0{,}2$, tai

$$P(B) = 0{,}9 \cdot 0{,}85 \cdot 0{,}2 + 0{,}9 \cdot 0{,}15 \cdot 0{,}8 + 0{,}1 \cdot 0{,}85 \cdot 0{,}8 + + 0{,}9 \cdot 0{,}85 \cdot 0{,}8 = 0{,}941.$$

Atsakymas. 0,941.

8. Sąlyginė tikimybė. Dviejų įvykių sandaugos tikimybė

Sprendžiant tikimybių teorijos uždavinius, dažnai reikia rasti įvykio A tikimybę, kai žinoma, kad įvyko kitas su tuo pačiu bandymu susijęs įvykis B.

Pavyzdžiui, atliekame bandymą: iš dėžės, kurioje iš viso yra 18 rutulių ir žinoma, kad 4 iš jų – juodi, nežiūrint vienas po kito išimame du rutulius. Nagrinėsime įvykius:

A – „antrasis ištrauktas rutulys yra juodas“,

B – „pirmasis ištrauktas rutulys yra juodas“.

Įvykio A tikimybė priklauso nuo to, ar įvyko, ar neįvyko įvykis B. Sakykime, įvykis B įvyko. Tada tarp dėžėje likusių 17 rutulių yra tik trys juodi rutuliai, todėl įvykio A tikimybė $P(A) = \frac{3}{17}$. Jei įvykis B neįvyko, tai iš dėžės liko neišimti visi 4 juodi rutuliai ir todėl dabar $P(A) = \frac{4}{17}$.

Įvykio A tikimybė, apskaičiuota žinant, kad jau įvyko kitas su tuo pačiu bandymu susijęs įvykis B, vadinama **sąlygine** ir žymima $P(A \setminus B)$.

Taigi simbolis $P(A \setminus B)$ žymi sąlyginę įvykio A tikimybę su sąlyga B.

Analogiškai apibrėžiama sąlyginė įvykio B tikimybė su sąlyga A. Sąlyginė įvykio B tikimybė su sąlyga A žymima $P(B \setminus A)$.

1 pavyzdys. Dėžėje yra 4 balti ir 3 juodi rutuliai. Iš dėžės vienas po kito išimami du rutuliai. Rasime tikimybę, kad antrasis išimtas rutulys yra juodas su sąlyga, kad pirmasis išimtas rutulys buvo juodas.

Sprendimas. Pažymėsime įvykius:

A – „pirmasis išimtas rutulys yra juodas";

B – „antrasis išimtas rutulys yra juodas".

Jeigu įvyko įvykis A, tai dėžėje liko 6 rutuliai, iš kurių 2 juodi. Todėl ieškomoji sąlyginė įvykio B su sąlyga A tikimybė $P(B \setminus A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

2 pavyzdys. Iš 32 kortų kaladės viena po kitos traukiamos dvi kortos. Rasime tikimybę, kad antroji ištraukta korta yra karalius su sąlyga, kad pirmoji ištraukta korta buvo karalius.

Sprendimas. Pažymėkite įvykius:

A – „pirmoji ištraukta korta yra karalius";

B – „antroji ištraukta korta yra karalius".

Jei įvykis A įvyko, tai tarp likusios 31 kortos yra tik 3 karaliai, todėl sąlyginė įvykio B su sąlyga A tikimybė $P(B \setminus A) = \frac{3}{31}$.

Tarkime, kad įvykio B tikimybė $P(B) \neq 0$. Tada sąlyginė įvykio A su sąlyga B tikimybė $P(A \setminus B)$ apskaičiuojama remiantis formule:

$$\boxed{P(A \setminus B) = \frac{P(AB)}{P(B)}.}$$

Analogiškai įvykio B su sąlyga A ($P(A) \neq 0$) tikimybė $P(B \setminus A)$ apskaičiuojama remiantis formule:

$$\boxed{P(B \setminus A) = \frac{P(AB)}{P(A)}.}$$

Uždavinių sprendimo pavyzdžiai

1 pavyzdys. Ridenami du lošimo kauliukai. Įvykis A – „atvirtusių akučių suma lygi 8“, įvykis B – „atvirtusių akučių skaičių sandauga neviršija 17“. Raskite įvykio A tikimybę su sąlyga B.

Sprendimas. Elementarius įvykius galime koduoti skaičių pora. Pirmasis skaičius reiškia pirmojo kauliuko ridenimo rezultatą, antrasis skaičius – antrojo:

(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6),
(2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6),
(3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6),
(4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6),
(5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6),
(6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6).

Elementariųjų įvykių yra 36.

Įvykiui A palankūs elementarieji įvykiai:

(2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2).

Tokių įvykių yra 5, todėl $P(A)=\frac{5}{36}$.

Įvykiui B palankūs elementarieji įvykiai:

(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6),
(2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6),
(3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (4, 1),
(4, 2), (4, 3), (4, 4), (5, 1), (5, 2), (5, 3),
(6, 1), (6, 2).

Tokių įvykių yra 26, todėl $P(B)=\frac{26}{36}$.

Gauname, kad įvykio A tikimybė su sąlyga, kad įvyko įvykis B, lygi: $P(A \setminus B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$, $P(A \setminus B)=\frac{\frac{5}{36}}{\frac{26}{36}}=\frac{5}{26}$.

2 pavyzdys. Visos lošimo kauliuko sienos užklijuotos nepermatomu popieriumi: 1, 2, 3 sienos – raudonu, o 4, 5, 6 sienos – juodu. Išmetus lošimo kauliuką, iškrito juoda siena. Kokia tikimybė, kad šioje sienoje yra lyginis akučių skaičius?

Sprendimas. Pažymėkime įvykius:

A – „iškrito lyginis akučių skaičius";

B – „iškritusių akučių skaičius yra didesnis už 3".

$$P(A \setminus B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{\frac{2}{6}}{\frac{3}{6}} = \frac{2}{3}.$$

Pastebime, kad įvykio A besąlyginė tikimybė (arba tiesiog tikimybė P(A)) lygi $\frac{1}{2}$. **Atsakymas.** $\frac{2}{3}$.

3 pavyzdys. Kokia tikimybė, kad atsitiktinai ištrauktas domino kauliukas yra „dublis", jeigu žinoma, kad ant šio kauliuko esančių taškų suma yra lyginis skaičius?

Sprendimas. Tegul įvykis A – „ant kauliuko esančių taškų suma yra lyginis skaičius", o įvykis B – „ištrauktas kaulelis yra „dublis"", tada

$$P(B \setminus A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{\frac{7}{28}}{\frac{16}{28}} = \frac{7}{16}.$$

Reikia žinoti, kad iš 28 domino kaulelių ant 16 kauliukų esančių taškų suma yra lyginis skaičius, o 7 kauliukai yra „dubliai".

Pastebėkime, kad įvykio B besąlyginė (kai įvykis A nėra įvykęs) yra $P(B) = \frac{7}{28}$. **Atsakymas**. $\frac{7}{16}$.

Jei įvykiai A ir B nepriklausomi, tai P(B\A) = P(B), P(A\B) = P(A), todėl:

$$\boxed{P(AB) = P(A) \cdot P(B \setminus A) = P(A) \cdot P(B),}$$

$$P(AB) = P(B) \cdot P(A \backslash B) = P(B) \cdot P(A).$$

Abiem atvejais

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B),$$

t.y. dviejų nepriklausomų įvykių sandaugos tikimybė yra lygi tų įvykių tikimybių sandaugai.

Pavyzdys. Dviejose dėžutėse yra skirtingų spalvų, bet vienodo dydžio ir formos pieštukai. Pirmojoje dėžutėje yra 4 raudoni ir 6 juodi pieštukai, o antrojoje – 3 raudoni, 5 mėlyni ir 2 juodi pieštukai. Iš abiejų dėžučių atsitiktinai išimama po vieną pieštuką. Kokia tikimybė, kad abu pieštukai bus raudoni?

Sprendimas. Bandymo esmė ta, kad iš kiekvienos dėžutės išimama po vieną pieštuką. Pažymėkime įvykius:

A – „iš pirmos dėžutės išimtas pieštukas yra raudonas";

B – „iš antros dėžutės išimtas pieštukas yra taip pat raudonas";

AB – „abu išimti pieštukai yra raudoni".

Įvykiai A ir B yra nepriklausomi, todėl $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$. Turime, kad $P(A) = \frac{4}{10} = 0{,}4$, $P(B) = \frac{3}{10} = 0{,}3$. Vadinasi, tikimybė, kad abu ištraukti pieštukai yra raudoni, lygi $P(AB) = P(A) \cdot P(B) = 0{,}4 \cdot 0{,}3 = 0{,}12$.

Atsakymas. 0,12.

9. Dviejų priklausomų įvykių sandaugos tikimybė

Dviejų priklausomų įvykių A ir B sandaugos tikimybė yra lygi vieno iš jų tikimybei, padaugintai iš kito įvykio sąlyginės tikimybės, kai pirmasis įvykis įvyko:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B \backslash A), \qquad P(AB) = P(B) \cdot P(A \backslash B).$$

Uždavinių sprendimo pavyzdžiai

1 pavyzdys. Dėžėje yra 3 raudoni ir 6 juodi rutuliai. Atsitiktinai vienas po kito išimami 2 rutuliai. Kokia tikimybė, kad abu rutuliai juodi?

Sprendimas. Pažymėkime įvykius: A – „pirmasis rutulys juodas“;
B – „antrasis rutulys juodas“;
AB – „abu rutuliai juodi“.

$P(A)=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$, $P(B\setminus A)=\frac{5}{8}$. Įvykiai A ir B priklausomi, todėl

$P(AB)=P(A)\cdot P(B\setminus A)=\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{8}=\frac{5}{12}$. **Atsakymas.** $\frac{5}{12}$.

2 pavyzdys. Mokinys 2 kartus traukia po vieną bilietą iš 34 egzaminui parengtų bilietų. Kokia tikimybė, kad mokinys išlaikys egzaminą, jeigu jis išmoko tik 30 bilietų ir pirmą kartą ištraukė bilietą, kurio jis nemoka, t.y. „nelaimingą bilietą“?

Sprendimas. Bandymo esmė yra ta, kad mokinys atsitiktinai du kartus traukia po vieną bilietą ir, be to, pirmą kartą ištrauktas bilietas atgal prie likusiųjų bilietų nepadedamas. Pažymėkime įvykius:

A – „pirmą kartą ištrauktas „nelaimingas“ bilietas“;

B – „antrą kartą ištrauktas „laimingas“ bilietas“;

AB – „pirmą kartą ištrauktas bilietas buvo „nelaimingas“, o antrą kartą – „laimingas“.

Įvykiai A ir B yra priklausomi, nes pirmą kartą ištrauktas bilietas negrąžinamas prie likusiųjų. Vadinasi, P(AB) = P(A) · P(B\A).

Iš uždavinio sąlygos išplaukia, kad $P(A)=\frac{4}{34}$. Jeigu įvykis A įvyko, tai ant egzaminatoriaus stalo liko 33 bilietai, iš kurių 30 yra „laimingų“. Vadinasi, $P(B\setminus A)=\frac{30}{33}$ ir ieškomoji tikimybė

$P(AB)=P(A)\cdot P(B\setminus A)=\frac{4}{34}\cdot\frac{30}{33}=\frac{60}{561}\approx 0{,}107$. **Atsakymas.** $\approx 0{,}107$.

3 pavyzdys. Iš 32 kortų kaladės atsitiktinai viena po kitos ištraukiamos dvi kortos. Kokia tikimybė, kad:

1) ištraukti du tūzai;

2) ištrauktos dvi čirvų kortos;

3) ištrauktas karalius ir dama?

Sprendimas. 1) Pažymime įvykius:

A – „pirmoji korta – tūzas";

B – „antroji korta – tūzas".

Įvykio A tikimybė yra $P(A)=\frac{4}{32}=\frac{1}{8}$.

Jei įvykis A įvyko, tai tarp likusios 31 kortos yra tik 3 tūzai, todėl įvykio B tikimybė, kai įvyksta įvykis A lygi $P(B \setminus A)=\frac{3}{31}$, todėl

$$P(AB)=P(A)\cdot P(B \setminus A)=\frac{1}{8}\cdot\frac{3}{31}=\frac{3}{248}.$$

2) Pažymime įvykius:

C – „pirmoji korta – čirvai";

D – „antroji korta – čirvai".

Kadangi kortų kaladėje yra 8 čirvų kortos, tai įvykio C tikimybė $P(C)=\frac{8}{32}=\frac{1}{4}$, o įvykio D tikimybė, kai įvyko įvykis C lygi $P(D \setminus C)=\frac{7}{31}$, todėl $P(CD)=P(C)\cdot P(D \setminus C)=\frac{1}{4}\cdot\frac{7}{31}=\frac{7}{124}$.

3) Pažymime įvykius:

E – „pirmoji korta – karalius";

F – „antroji korta – dama".

Kadangi $P(E)=\frac{4}{32}=\frac{1}{8}$, o $P(F \setminus E)=\frac{4}{31}$, tai $P(EF)=\frac{1}{8}\cdot\frac{4}{31}=\frac{1}{62}$.

Atsakymas. 1) $\frac{3}{248}$; 2) $\frac{7}{124}$; 3) $\frac{1}{62}$.

Uždaviniai savarankiškam darbui

1. Tikimybė, kad šaulys kiekvienu šūviu pataikys, lygi 0,7. Jis šauna 4 kartus. Kokia tikimybė, kad pirmieji du šūviai nekliudys, o kiti du kliudys taikinį.

2. Metami du kauliukai. Kokia tikimybė, kad pirmajame iškris nelyginis akių skaičius, o antrajame – 5 akys?

3. Pirmoje dėžutėje yra 4 raudoni, 6 juodi, o antrojoje – 3 raudoni, 5 mėlyni ir 2 juodi pieštukai. Iš abiejų dėžučių atsitiktinai imama po vieną pieštuką. Kokia tikimybė, kad abu pieštukai bus raudoni?

4. Pirmos raketos pataikymo į taikinį tikimybė yra 0,7, antros – 0,8. Kokia tikimybė, kad abi raketos pataikys į taikinį?

5. Tikimybė, kad pirmosios staklės per darbo valandą nesuges yra 0,9, antrosios – 0,95. Kokia tikimybė, kad per darbo valandą suges tik vienos staklės, jei abi dirba nepriklausomai viena nuo kitos?

6. Du šauliai nepriklausomai vienas nuo kito šauna į taikinį. Pirmojo pataikymo tikimybė – 0,9, antrojo – 0,75. Kokia tikimybė, kad bent vienas šaulys pataikys į taikinį?

7. Tikimybė, kad pasukus mašinos raktelį vieną kartą motoras užsives, lygi $\frac{5}{6}$. Kokia tikimybė, kad raktelį pasukus antrą kartą motoras tikrai užsives?

8. Vieną kartą peršvietus rentgeno aparatu tuberkulioze sergančio žmogaus plaučius, tikimybė aptikti ligą lygi $\frac{3}{4}$. Kokia tikimybė, kad peršvietus plaučius tris kartus liga tikrai bus nustatyta?

9. Sukdamas „laimės ratą“ vieną kartą, berniukas ką nors laimi su tikimybe $\frac{1}{10}$. Apskaičiuokite tikimybes įvykių:

A – „berniukas laimės vieną kartą, bandęs 2 kartus“;

B – „berniukas laimės vieną kartą, bandęs 3 kartus“;

C – „laimės ne mažiau kaip du kartus, bandęs 3 kartus“.

10. Iš 30 istorijos bilietų Aidas išmoko 24 ir iš 46 fizikos egzamino bilietų – 32. Kokia tikimybė, kad Aidas išlaikys bent vieną egzaminą?

11. Kambaryje nepriklausomai viena nuo kitos dega dvi lemputės. Tikimybė, kad per valandą neperdegs pirmoji lemputė, lygi 0,8, kad antroji – 0,7. Kokia tikimybė, kad per valandą neperdegs nė viena lemputė?

12. Abiturientas laiko 2 stojamuosius egzaminus į aukštąją mokyklą. Tikimybė, kad jis išlaikys pirmąjį egzaminą, lygi 0,8, o antrąjį – 0,5. Kokia tikimybė, kad abiturientas išlaikys abu egzaminus?

13. Dėžėje yra 5 balti ir 4 juodi rutuliai. Atsitiktinai vienas po kito išimami du rutuliai. Kokia tikimybė, kad abu rutuliai balti?

14. Egzamino biliete yra 3 klausimai. Tikimybė, kad mokinys atsakys į pirmąjį ir antrąjį klausimą, lygi 0,9, o į trečiąjį – 0,8. Kokia tikimybė, kad mokinys išlaikys egzaminą, jei reikia atsakyti:

1) į visus tris klausimus;

2) nors į du klausimus.

15. Dviejose dėžėse yra skirtingų spalvų rutuliukai. Pirmoje dėžėje yra 5 balti, 11 juodų ir 8 raudoni rutuliukai, o antroje dėžėje – 10 baltų, 8 juodi ir 6 raudoni rutuliukai. Iš abiejų dėžių atsitiktinai traukiama po vieną rutuliuką. Kokia tikimybė, kad abu rutuliukai bus vienodos spalvos?

16. Vieno loterijos bilieto laimėjimo tikimybė $\frac{1}{7}$. Kokia tikimybė, kad nupirkus 5 bilietus, bus: 1) laimingi visi 5 bilietai; 2) nelaimingi visi 5 bilietai; 3) bent vienas bilietas laimingas?

17. Ridendami du lošimo kauliukai – raudonas ir mėlynas. Sakykime, kad r – raudono kauliuko, m – mėlyno kauliuko atvirtusių akučių skaičius.

Apskaičiuokite sąlygines įvykių tikimybes:

1) A – „$r = 5$ su sąlyga, kad $r + m \geq 8$ “;

2) B – „ $r \geq 4$ su sąlyga, kad $r + m = 8$ “;

3) C – „ $m \geq 4$ su sąlyga, kad $r = 5$ “;

4) D – „$m + r = 5$ su sąlyga, kad $|m - r| = 3$ “.

18. Lėkštėje yra 6 pyragaičiai, iš kurių 3 yra su aguonomis. Jonukas atsitiktinai iš lėkštės paėmė 2 pyragaičius. Kokia tikimybė, kad abu pyragaičiai yra su aguonomis.

19. Dėžėje yra 15 detalių, iš kurių 10 standartinių. Kokia tikimybė, kad atsitiktinai paeiliui iš dėžės išimtos dvi detalės bus standartinės ?

10. Pilnosios tikimybės formulė

Tikimybę įvykio A, pasirodančio kartu su vienu iš įvykių $A_1, A_2, \ldots, A_n$, kurie sudaro pilną tarpusavyje nesutaikomų įvykių grupę, randame pagal formulę:

$$P(A) = P(A \setminus A_1) \cdot P(A_1) + P(A \setminus A_2) \cdot P(A_2) + \ldots + P(A \setminus A_n) \cdot P(A_n),$$

kur $P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) = 1.$

1 pavyzdys. Pirmajame ceche buvo pagaminta 25% visų detalių, iš jų brokuotos detalės sudarė 15%, antrajame ceche buvo pagaminta 35% visų detalių, iš jų brokuotos detalės sudarė 12%, o trečiajame ceche buvo pagaminta 40% visų detalių, iš jų brokuotos detalės sudarė 6%. Raskite tikimybę įvykio, kad atsitiktinai paimta detalė bus brokuota.

Sprendimas. Pažymėsime įvykius:

A – „atsitiktinai paimta detalė yra brokuota“,

A_1 – „brokuota detalė pagaminta pirmajame ceche“,

A_2 – „ brokuota detalė pagaminta antrajame ceche “,

A_3 – „ brokuota detalė pagaminta trečiajame ceche “.

Įvykiai A_1, A_2, A_3 sudaro pilną tarpusavyje nesutaikomų įvykių grupę, be to, $P(A_1) = 0{,}25$, $P(A_2) = 0{,}35$, $P(A_3) = 0{,}4$.

Sąlyginė tikimybė, kad atsitiktinai paimta detalė yra brokuota ir pagaminta pirmajame ceche, lygi $P(A \setminus A_1) = 0{,}15$.

Sąlyginė tikimybė, kad atsitiktinai paimta detalė yra brokuota ir pagaminta antrajame ceche, lygi $P(A \setminus A_2) = 0{,}12$.

Sąlyginė tikimybė, kad atsitiktinai paimta detalė yra brokuota ir pagaminta trečiajame ceche, lygi $P(A \setminus A_3) = 0{,}06$.

Tikimybę įvykio A, kad atsitiktinai paimta detalė yra brokuota, randame pagal pilnos tikimybės formulę:

$$P(A)=P(A\setminus A_1)\cdot P(A_1)+P(A\setminus A_2)\cdot P(A_2)+P(A\setminus A_3)\cdot P(A_3),$$

$$P(A)=0{,}15\cdot 0{,}25+0{,}12\cdot 0{,}35+0{,}06\cdot 0{,}4=0{,}1035.$$

Atsakymas. 0,1035.

2 pavyzdys. Iš 100 elektros prietaisų 40 pagaminta pirmajame ceche, 35 – antrajame, o likusieji – trečiajame. Pirmasis cechas išleidžia kokybišką produkciją su tikimybe 0,8, antrasis – su tikimybe – 0,7, o trečiasis – su tikimybe – 0,9. Raskite įvykio, kad atsitiktinai paimtas prietaisas yra kokybiškas, tikimybę.

Sprendimas. Pažymėsime įvykius:

A – „paimtas prietaisas yra kokybiškas“,

A_1 – „paimtas prietaisas pagamintas pirmajame ceche“,

A_2 – „paimtas prietaisas pagamintas antrajame ceche“,

A_3 – „paimtas prietaisas pagamintas trečiajame ceche“.

Tikimybė, kad paimtas prietaisas pagamintas pirmajame ceche, lygi

$$P(A_1)=\frac{40}{100}=\frac{2}{5},$$

antrajame ceche – $$P(A_2)=\frac{35}{100}=\frac{7}{20},$$

trečiajame ceche – $$P(A_3)=\frac{25}{100}=\frac{1}{4}.$$

Įvykio A sąlyginės tikimybės lygios:

$$P(A\setminus A_1)=0{,}8,\quad P(A\setminus A_2)=0{,}7,\quad P(A\setminus A_3)=0{,}9.$$

Tikimybė įvykio A, kad atsitiktinai paimtas prietaisas yra kokybiškas, lygi:

$$P(A)=P(A\setminus A_1)\cdot P(A_1)+P(A\setminus A_2)\cdot P(A_2)+P(A\setminus A_3)\cdot P(A_3)$$

$$P(A)=\frac{8}{10}\cdot\frac{2}{5}+\frac{7}{10}\cdot\frac{7}{20}+\frac{9}{10}\cdot\frac{1}{4}=0{,}79.$$

Atsakymas. 0,79.

3 pavyzdys. Trijose vienodose dėžėse sudėti rutuliai: pirmoje dėžėje yra 15 baltų rutulių, antroje dėžėje – 10 baltų ir 5 juodi rutuliai, o trečioje dėžėje – 15 juodų rutulių. Iš atsitiktinai paimtos dėžės ištraukiamas baltas rutulys. Raskite įvykio, kad rutulys ištraukiamas iš pirmosios dėžės, tikimybę.

Sprendimas. Pažymėsime įvykius: A – „ištrauktas baltas rutulys“,
A_1 – „pasirinkta pirmoji dėžė“,
A_2 – „pasirinkta antroji dėžė“,
A_3 – „pasirinkta trečioji dėžė“,

Įvykiai A_1, A_2, A_3 yra vienodai galimi ir $P(A_1)=P(A_2)=P(A_3)=\frac{1}{3}$.

Tikimybė, kad paimtas baltas rutulys yra iš pirmosios dėžės, lygi:

$$P(A \setminus A_1)=\frac{15}{15}=1.$$

Tikimybė, kad paimtas baltas rutulys yra iš antrosios dėžės, lygi:

$$P(A \setminus A_2)=\frac{10}{15}=\frac{2}{3}.$$

Tikimybė, kad paimtas baltas rutulys yra iš trečiosios dėžės, lygi:

$$P(A \setminus A_3)=\frac{0}{15}=0.$$

Įvykio A tikimybę randame pagal formulę:

$$P(A)=P(A \setminus A_1)\cdot P(A_1)+P(A \setminus A_2)\cdot P(A_2)+P(A \setminus A_3)\cdot P(A_3)$$

$$P(A)=1\cdot\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}+0\cdot\frac{1}{3}=\frac{5}{9}.$$

Remiantis sąlyginės tikimybės apibrėžimu, apskaičiuosime tikimybę įvykio, kad baltas rutulys ištrauktas pirmosios dėžės: $P(A_1 \setminus A)=\frac{P(A_1A)}{P(A)}$.

Kadangi $P(A_1A)=P(A_1)\cdot P(A \setminus A_1)$,

$$\text{t.y. } P(A_1A)=\frac{1}{3}\cdot 1=\frac{1}{3},\ \text{tai } P(A_1 \setminus A)=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{5}{9}}=\frac{3}{5}=0{,}6.$$

Atsakymas. 0,6.

Uždaviniai savarankiškam darbui

1. Pirmoje dėžėje yra 20 detalių , iš jų 15 yra standartinių, antroje dėžėje yra 30 detalių, iš jų 24 – standartinės, trečioje dėžėje yra 10 detalių, iš jų 6 – standartinės. Raskite įvykio, kad atsitiktinai paimta detalė iš atsitiktinai paimtos dėžės yra standartinė, tikimybę.

2. Iš 80 detalių 36 pagamintos pirmajame ceche, 24 – antrajame, o likusios – trečiajame. Pirmasis cechas išleidžia standartinę produkciją su tikimybe 0,8, antrasis – su tikimybe 0,6, o trečiasis – su tikimybe 0,8. Raskite įvykio, kad atsitiktinai paimta detalė yra standartinė, tikimybę.

3. Pirmajame gamybos ceche pagaminama 90% standartinių detalių, antrajame – 95% , o trečiajame – 85%. Į surinkimo cechą iš pirmojo gamybos cecho patenka 50% detalių, iš antrojo – 30%, o iš trečiojo – 20%. Raskite įvykio, kad surinkimo ceche atsitiktinai paimta detalė bus standartinė, tikimybę.

4. Į taikinį šauta tris kartus. Tikimybė, kad į taikinį bus pataikyta pirmuoju šūviu, lygi 0,5, antruoju šūviu – 0,6, trečiuoju šūviu – 0,8. Tikimybė, kad vienu šūviu bus pasiektas tikslas (pataikyta į 10), lygi 0,4, du kartus šovus – 0,7, tris kartus – 1,0. Raskite įvykio, kad iššovus tris kartus bus pataikyta į 10, tikimybę.

5. Dviejose vienodose dėžėse sudėti batai. Pirmoje dėžėje yra 8 poros 41 dydžio ir 6 poros 42 dydžio batų. Antroje dėžėje yra 10 porų 41 dydžio ir 4 poros 42 dydžio batų. Iš atsitiktinai pasirinktos dėžės ištraukta batų pora buvo 42 dydžio. Raskite įvykio, kad ši pora ištraukta iš pirmosios dėžės, tikimybę.

6. Žvejys turi tris mėgstamas žvejybos vietas, kurias jis lanko su vienoda tikimybe. Tikimybė, kad žuvis kibs pirmoje vietoje, lygi $\frac{1}{3}$, antroje – $\frac{1}{2}$, trečioje – $\frac{1}{4}$. Žvejys atsitiktinai pasirinktoje vietoje užmetė meškerę ir žuvis užkibo. Raskite įvykio, kad žvejys meškeriojo pirmoje vietoje, tikimybę.

11. Atsitiktiniai dydžiai

Atsitiktinis dydis yra toks dydis, kuris po bandymo įgyja konkrečią, iš anksto nežinomą skaitinę reikšmę.

Atsitiktinių dydžių pavyzdžiai

1. Metame lošimo kauliuką. Atsitiktinis dydis yra vieną kartą metus lošimo kauliuką pasirodžiusių taškų skaičius.

2. Perkame n loterijos bilietų. Atsitiktinis dydis yra laimėjimo dydis.

3. Bandoma elektros lemputės tarnavimo trukmė. Atsitiktinis dydis yra pilnas lemputės tarnavimo laikas.

4. Šaulys n kartų šauna į taikinį. Atsitiktinis dydis yra pataikymų skaičius.

5. Per futbolo varžybas komandos pelnytų įvarčių skaičius yra atsitiktinis dydis.

Toliau žymėsime:

X – atsitiktinis dydis;

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ – atsitiktinio dydžio įgyjamos reikšmės;

$p_1, p_2, \ldots, p_n$ – atsitiktinio dydžio X įgyjamų reikšmių $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tikimybės atitinkamai;

įvykis A_1 – „atsitiktinis dydis X įgijo reikšmę x_1, su tikimybe p_1“;

įvykis A_2 – „atsitiktinis dydis X įgijo reikšmę x_2, su tikimybe p_2“;

- -

įvykis A_n – „atsitiktinis dydis X įgijo reikšmę x_n, su tikimybe p_n“.

Atsitiktinio dydžio X **pasiskirstymo dėsnis**, arba **skirstinys**, yra visuma visų atsitiktinio dydžio X reikšmių ir tų reikšmių tikimybių.

Dažniausiai atsitiktinio dydžio X skirstinys užrašomas lentele:

X	x_1	x_2	x_3	...	x_n
P	p_1	p_2	p_3	...	p_n

Įvykiai $A_1, A_2, \ldots, A_n$ yra nesutaikomi, nes atsitiktinis dydis X gali įgyti tik vieną kurią nors reikšmę. Įvykis $A_1 + A_2 + \ldots + A_n$ yra būtinasis, t.y. vieną iš reikšmių $x_1, x_2,, \ldots, x_n$ dydis būtinai įgyja, todėl:

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = 1,$$

arba $P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) = 1$, arba $p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$.

1 pavyzdys. Metamos dvi monetos. Atsitiktinis dydis X yra herbo atsivertimų skaičius. Užrašysime šio atsitiktinio dydžio skirstinį.

Sprendimas. Bandymo galimos baigtys (bandymo elementarieji įvykiai) yra: HH, HS, SH, SS. Atsitiktinis dydis X gali įgyti reikšmes 0, 1, 2. Palankių įvykių toms reikšmėms įgyti atitinkamai yra 1, 2, 1, todėl atsitiktinio dydžio X skirstinys yra:

X	0	1	2
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

2 pavyzdys. Du kartus metamas lošimo kauliukas. Atsitiktinis dydis X yra per abu metimus iškritusių taškų suma. Užrašysime jo pasiskirstymo dėsnį (skirstinį).

Sprendimas. Atsitiktinio dydžio X įgyjamos reikšmės yra skaičiai 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12. Vadinasi, atsitiktinis dydis X gali įgyti 11 reikšmių: $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $x_3 = 4$, ..., $x_{11} = 12$. Pažymėkime įvykius:

įvykis A_1 – „atsitiktinis dydis X įgijo reikšmę $x_1 = 2$“;

įvykis A_2 – „atsitiktinis dydis X įgijo reikšmę $x_2 = 3$“;

- -

įvykis A_{11} – „atsitiktinis dydis X įgijo reikšmę $x_{11} = 12$“.

Rasime įvykio A_1 tikimybę.

Bandymo elementariųjų įvykių yra:

$n = \overline{A}_6^2 = 6^2 = 36$ (gretiniai su pasikartojimais iš 6 elementų po 2).

Įvykiui A_1 palankių elementariųjų įvykių yra $m = 1$ (jei ant pirmojo ir ant antrojo kauliuko atsivertė po vieną tašką, tai jų suma lygi $x_1 = 2$).

Vadinasi, $P(A_1) = p_1 = \frac{1}{36}$.

Panašiai randame ir kitų įvykių tikimybes:

$P(A_2) = p_2 = \frac{2}{36}$; $P(A_3) = p_3 = \frac{3}{36}$; $P(A_4) = p_4 = \frac{4}{36}$;

$P(A_5) = p_5 = \frac{5}{36}$; $P(A_6) = p_6 = \frac{6}{36}$; $P(A_7) = p_7 = \frac{5}{36}$;

$P(A_8) = p_8 = \frac{4}{36}$; $P(A_9) = p_9 = \frac{3}{36}$; $P(A_{10}) = p_{10} = \frac{2}{36}$;

$P(A_{11}) = p_{11} = \frac{1}{36}$.

Skirstinys, užrašytas lentele, atrodo taip:

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

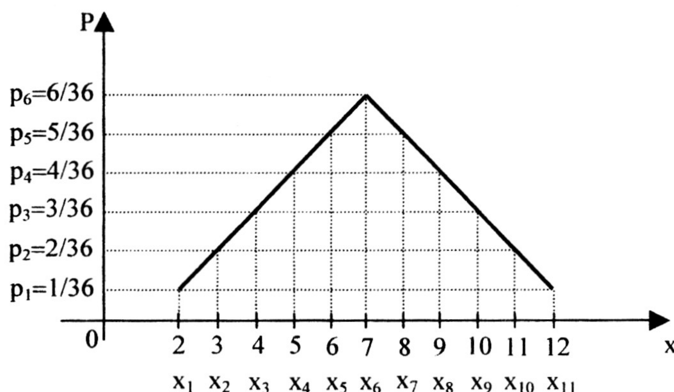
Aišku, kad $P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \ldots + P(A_{11}) = 1$

arba $p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_{11} =$

$$= \frac{1}{36} + \frac{2}{36} + \frac{3}{36} + \frac{4}{36} + \frac{5}{36} + \frac{6}{36} + \frac{5}{36} + \frac{4}{36} + \frac{3}{36} + \frac{2}{36} + \frac{1}{36} = 1.$$

Atsitiktinio dydžio skirstinys gali būti pavaizduotas grafiškai tokiu būdu: O_x ašyje atidedame atsitiktinio dydžio reikšmes, o O_y ašyje – jų atitinkamas tikimybes; laužtė, jungianti taškus $(x_i ; p_i)$, yra **pasiskirstymo daugiakampis**, arba **poligonas**.

Išnagrinėtame pavyzdyje atsitiktinio dydžio X skirstinio grafinis vaizdas – poligonas yra toks:



Atsitiktinio dydžio matematinė viltis (vidurkis)

Tarkime, kad atsitiktinio dydžio X skirstinys užrašytas lentele:

X	x_1	x_2	x_3	...	x_n
P	p_1	p_2	p_3	...	p_n

Atsitiktinio dydžio **matematinė viltis (vidurkis)** (žymima EX) yra atsitiktinio dydžio reikšmių ir jų atitinkamų tikimybių sandaugų suma:

$$EX = x_1p_1 + x_2p_2 + \ldots + x_np_n .$$

Matematinė viltis yra vidurkinė atsitiktinio dydžio reikšmė.

1 pavyzdys. Atsitiktinio dydžio X skirstinys užrašytas lentele atrodo taip:

X	0	1	2	3	4	5
P	$\frac{1}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{1}{32}$

Rasime atsitiktinio dydžio matematinę viltį (vidurkį). Šiuo atveju:

$x_1 = 0,\quad x_2 = 1,\quad x_3 = 2,\quad x_4 = 3,\quad x_5 = 4,\quad x_6 = 5,$

$p_1 = \frac{1}{32},\quad p_2 = \frac{5}{32},\quad p_3 = \frac{10}{32},\quad p_4 = \frac{10}{32},\quad p_5 = \frac{5}{32},\quad p_6 = \frac{1}{32},$

$EX = x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + x_4p_4 + x_5p_5 + x_6p_6,$

$$EX = 0 \cdot \frac{1}{32} + 1 \cdot \frac{5}{32} + 2 \cdot \frac{10}{32} + 3 \cdot \frac{10}{32} + 4 \cdot \frac{5}{32} + 5 \cdot \frac{1}{32} = 2{,}5.$$

Atsakymas. $EX = 2{,}5$.

4 pavyzdys. Loterijoje yra 1000 bilietų. 200 bilietų laimi po 1 Lt, 100 bilietų – po 5 Lt, 80 bilietų – po 20 Lt, 20 bilietų – po 50 Lt. Laimėjimo dydis X yra atsitiktinis dydis. Užrašysime jo skirstinį ir apskaičiuosime matematinę viltį (vidurkį).

Sprendimas. Laimėjimų dydžiai:

$x_1 = 0,\ x_2 = 1,\ x_3 = 5,\ x_4 = 20,\ x_5 = 50.$

Šių laimėjimų tikimybės yra:

$p_1 = \frac{600}{1000} = 0{,}6$ (600 bilietų yra be laimėjimų);

$p_2 = \frac{200}{1000} = 0{,}2;\quad p_3 = \frac{100}{1000} = 0{,}1;\quad p_4 = \frac{80}{1000} = 0{,}08;\quad p_5 = \frac{20}{1000} = 0{,}02.$

Skirstinys:

X	0	1	5	20	50
P	0,6	0,2	0,1	0,08	0,02

Matematinis vidurkis:

$EX = 0 \cdot 0{,}6 + 1 \cdot 0{,}2 + 5 \cdot 0{,}1 + 20 \cdot 0{,}08 + 50 \cdot 0{,}02 = 3{,}3.$

Atsakymas. 3,3.

Atsitiktinio dydžio dispersija

Atsitiktinio dydžio X **nuokrypis** nuo matematinės vilties EX yra atsitiktinis dydis X – EX. Atsitiktinio dydžio X **nuokrypio kvadratas** $(X - EX)^2$, taip pat yra atsitiktinis dydis. Sakykime, atsitiktinio dydžio X skirstinys užrašytas lentele:

X	x_1	x_2	x_3	...	x_n
P	p_1	p_2	p_3	...	p_n

Tada atsitiktinio dydžio $(X - EX)^2$ skirstinys yra:

$(X - EX)^2$	$(x_1 - EX)^2$	$(x_2 - EX)^2$	$(x_3 - EX)^2$	...	$(x_n - EX)^2$
P	p_1	p_2	p_3	...	p_n

Atsitiktinio dydžio X **dispersija** vadinama atsitiktinio dydžio $(X - EX)^2$ matematinė viltis (vidurkis).

Atsitiktinio dydžio X dispersija žymima DX. Taigi

$$DX = E(X - EX)^2.$$

Remdamiesi atsitiktinio dydžio matematinės vilties (vidurkio) skaičiavimo formule, gauname:

$$DX = (x_1 - EX)^2 \cdot p_1 + (x_2 - EX)^2 \cdot p_2 + \ldots + (x_n - EX)^2 \cdot p_n.$$

Praktiniams skaičiavimams labai patogi yra ši dispersijos skaičiavimo formulė:

$$DX = EX^2 - (EX)^2.$$

Dispersija parodo, kaip atsitiktinio dydžio reikšmės yra išsisklaidžiusios apie jo matematinę viltį, t.y. jei DX yra nedidelis skaičius, tai atsitiktinio

dydžio X reikšmės artimos matematinei vilčiai EX, o jei DX yra didelis skaičius, tai atsitiktinio dydžio X reikšmės labai skiriasi nuo jo matematinės vilties EX (yra labai išsisklaidžiusios EX atžvilgiu).

1 pavyzdys. Duotas atsitiktinio dydžio X skirstinys (užrašytas lentele):

X	-4	-3	0	5	10
P	$\frac{6}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$

Apskaičiuosime atsitiktinio dydžio X dispersiją DX.

Sprendimas. Pirmiausia randame atsitiktinio dydžio X matematinę viltį (vidurkį) EX:

$$EX = -4 \cdot \frac{6}{16} + (-3) \cdot \frac{4}{16} + 0 \cdot \frac{3}{16} + 5 \cdot \frac{2}{16} + 10 \cdot \frac{1}{16} = -1, \qquad EX = -1.$$

Kad apskaičiuotume atsitiktinio dydžio X dispersiją DX, sudarykime atsitiktinio dydžio $(X - EX)^2$ skirstinį:

$(X-EX)^2$	$(-4-(-1))^2$	$(-3-(-1))^2$	$(0-(-1))^2$	$(5-(-1))^2$	$(10-(-1))^2$
P	$\frac{6}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$

Atsitiktinio dydžio X dispersija DX yra atsitiktinio dydžio $(X - EX)^2$ matematinė viltis (vidurkis):

$$DX = E(X - EX)^2, \text{ t.y.}$$

$$DX = (-4-(-1))^2 \cdot \frac{6}{16} + (-3-(-1))^2 \cdot \frac{4}{16} + (0-(-1))^2 \cdot \frac{3}{16} +$$

$$+ (5-(-1))^2 \cdot \frac{2}{16} + (10-(-1))^2 \cdot \frac{1}{16} = 9 \cdot \frac{6}{16} + 4 \cdot \frac{4}{16} + 1 \cdot \frac{3}{16} +$$

$$+ 36 \cdot \frac{2}{16} + 121 \cdot \frac{1}{16} = 14\frac{1}{8} = 14{,}125.$$

Atsakymas. DX = 14,125.

2 pavyzdys. Atsitiktinis dydis X yra vieną kartą metus lošimo kauliuką pasirodžiusių taškų skaičius. Rasime atsitiktinio dydžio X dispersiją DX.

Sprendimas. Atsitiktinio dydžio X skirstinys yra:

X	1	2	3	4	5	6
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Rasime atsitiktinio dydžio X matematinę viltį (vidurkį) EX:

$$EX = 1\cdot\frac{1}{6} + 2\cdot\frac{1}{6} + 3\cdot\frac{1}{6} + 4\cdot\frac{1}{6} + 5\cdot\frac{1}{6} + 6\cdot\frac{1}{6} = 3{,}5;\ EX = 3{,}5.$$

Atsitiktinio dydžio $(X - EX)^2$ skirstinys, užrašytas lentele, yra:

$(X - EX)^2$	$(1-3{,}5)^2$	$(2-3{,}5)^2$	$(3-3{,}5)^2$	$(4-3{,}5)^2$	$(5-3{,}5)^2$	$(6-3{,}5)^2$
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Apskaičiuojame atsitiktinio dydžio X dispersiją:

$$DX = (1-3{,}5)^2\cdot\frac{1}{6} + (2-3{,}5)^2\cdot\frac{1}{6} + (3-3{,}5)^2\cdot\frac{1}{6} + (4-3{,}5)^2\cdot\frac{1}{6} +$$

$$+ (5-3{,}5)^2\cdot\frac{1}{6} + (6-3{,}5)^2\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{6}\cdot 17{,}5 = \frac{35}{12} = 2\frac{11}{12}.$$

Atsakymas. $EX = 3{,}5;\ DX = 2\frac{11}{12}$.

3 pavyzdys. Atsitiktinio dydžio X skirstinys užrašytas lentele:

X	-1	0	1	2
P	0,2	0,1	0,3	0,4

Apskaičiuosime atsitiktinio dydžio X dispersiją remdamiesi formule $DX = EX^2 - (EX)^2$.

Sprendimas. Pirmiausia apskaičiuosime atsitiktinio dydžio X matematinę viltį (vidurkį) EX: $EX = -1\cdot 0{,}2 + 0\cdot 0{,}1 + 1\cdot 0{,}3 + 2\cdot 0{,}4 = 0{,}9$.

Atsitiktinio dydžio X kvadratas X^2 taip pat yra atsitiktinis dydis ir jo skirstinys, užrašytas lentele, atrodo taip:

X^2	$(-1)^2$	0^2	1^2	2^2
P	0,2	0,1	0,3	0,4

arba

X^2	1	0	1	4
P	0,2	0,1	0,3	0,4

Randame atsitiktinio dydžio X^2 matematinę viltį EX^2:

$EX^2 = 1\cdot 0{,}2 + 0\cdot 0{,}1 + 1\cdot 0{,}3 + 4\cdot 0{,}4 = 2{,}1$. Taigi $EX^2 = 2{,}1$.

Kadangi $EX = 0{,}9$, tai $(EX)^2 = (0{,}9)^2 = 0{,}81$.

Vadinasi, $DX = EX^2 - (EX)^2$; $DX = 2{,}1 - 0{,}81 = 1{,}29$.

Atsakymas. $DX = 1{,}29$.

Vidutinis kvadratinis nuokrypis

Kvadratinė šaknis iš atsitiktinio dydžio X dispersijos DX vadinama atsitiktinio dydžio X **vidutiniu kvadratiniu nuokrypiu** ir žymima σ,

$$\sigma = \sqrt{DX}.$$

Pavyzdžiui, jei atsitiktinio dydžio X dispersija $DX = 0{,}36$, tai jo vidutinis kvadratinis nuokrypis $\sigma = \sqrt{0{,}36} = 0{,}6$.

Skyrelio „Atsitiktiniai dydžiai“ uždavinių sprendimo pavyzdžiai

1 pavyzdys. Turime 10 vienodų kortelių, kuriuose užrašyti skaičiai:

1	1	1	4	4	4	4	6	6	6

Ištraukiama viena kortelė, užrašomas skaičius ir kortelė dedama atgal. Atsitiktinai ištraukiama antra kortelė. Atsitiktinis dydis X – ištrauktų kortelių skaičių suma.

1. Parodykite, kad atsitiktinis dydis X įgyja reikšmę 5 su tikimybe 0,24.
2. Pabaikite pildyti lentelę, apibrėžiančią atsitiktinio dydžio X skirstinį:

X	2	5	7	8	10	12
P		0,24				

3. Apskaičiuokite atsitiktinio dydžio X matematinę viltį EX ir dispersiją DX.
4. Apskaičiuokite atsitiktinio dydžio X vidutinį kvadratinį nuokrypį σ.

Sprendimas.

1. Ant ištrauktų kortelių užrašytų skaičių suma lygi 5, kai ant pirmosios kortelės bus užrašytas skaičius 1 arba 4.

Tikimybė, kad ant pirmosios ištrauktos kortelės bus užrašytas skaičius 1 lygi $\frac{3}{10}$, nes iš viso yra 10 kortelių, o, skaičius 1 užrašytas ant 3 kortelių.

Tikimybė, kad ant antrosios ištrauktos kortelės bus užrašytas skaičius 4, lygi $\frac{4}{10}$.

Atvirkščiai, tikimybė, kad ant pirmosios kortelės bus užrašytas skaičius 4, lygi $\frac{4}{10}$, o ant antrosios kortelės – skaičius 1, lygi $\frac{3}{10}$.

Tikimybė, kad ištrauktų kortelių skaičių suma yra 5, lygi $P(X=5)=\frac{3}{10}\cdot\frac{4}{10}+\frac{4}{10}\cdot\frac{3}{10}=0{,}24$.

2. Galimi atvejai:

I kortelė	1	1	4	1	6	4	4	6	6
II kortelė	1	4	1	6	1	4	6	4	6
Sumos	2	5	5	7	7	8	10	10	12

Matome, kad atsitiktinis dydis X gali įgyti šias reikšmes: 2, 5, 7, 8, 10, 12. Apskaičiuojame tikimybes, su kuriomis atsitiktinis dydis X šias reikšmes įgyja:

$$P(X=2)=\frac{3}{10}\cdot\frac{3}{10}=0{,}09;$$

$$P(X=5)=\frac{3}{10}\cdot\frac{4}{10}+\frac{4}{10}\cdot\frac{3}{10}=0{,}24;$$

$$P(X=7)=\frac{3}{10}\cdot\frac{3}{10}+\frac{3}{10}\cdot\frac{3}{10}=0{,}18;$$

$$P(X=8)=\frac{4}{10}\cdot\frac{4}{10}=0{,}16;$$

$$P(X=10)=\frac{4}{10}\cdot\frac{3}{10}+\frac{3}{10}\cdot\frac{4}{10}=0{,}24;$$

$$P(X=12)=\frac{3}{10}\cdot\frac{3}{10}=0{,}09.$$

Užpildome lentelę, apibrėžiančią atsitiktinio dydžio X skirstinį:

X	2	5	7	8	10	12
P	0,09	0,24	0,18	0,16	0,24	0,09

3. Atsitiktinio dydžio X matematinė viltis:

$$EX = 2\cdot 0{,}09 + 5\cdot 0{,}24 + 7\cdot 0{,}18 + 8\cdot 0{,}16 + 10\cdot 0{,}24 + 12\cdot 0{,}09 = 7{,}4.$$

Atsitiktinio dydžio X dispersija:

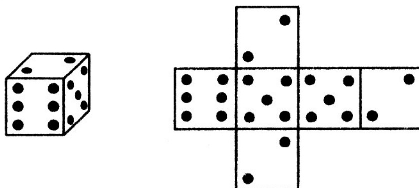
$$DX=(2-7{,}4)^2\cdot 0{,}09+(5-7{,}4)^2\cdot 0{,}24+(7-7{,}4)^2\cdot 0{,}18+$$

$$+(8-7{,}4)^2\cdot 0{,}16+(10-7{,}4)^2\cdot 0{,}24+(12-7{,}4)^2\cdot 0{,}09=7{,}62.$$

4. Apskaičiuojame atsitiktinio dydžio X vidutinį kvadratinį nuokrypį:

$$\sigma=\sqrt{DX};\quad \sigma=\sqrt{7{,}62}\approx 2{,}76.$$

2 pavyzdys. Šešiasienis lošimo kauliukas, ant kurio sienelių užrašyti skaičiai 2, 2, 2, 5, 5, 6, metamas du kartus.



Atsitiktinis dydis X – suma skaičių, pasirodžiusių metus kauliuką pirmą ir antrą kartą.

1. Parodykite, kad atsitiktinis dydis X įgyja reikšmę 4 su tikimybe $\frac{1}{4}$.
2. Pabaikite pildyti lentelę, apibrėžiančią atsitiktinio dydžio X skirstinį:

X	4	7	8	10	11	12
P	$\frac{1}{4}$					

3. Apskaičiuokite atsitiktinio dydžio X matematinę viltį EX ir dispersiją DX.
4. Nubraižykite atsitiktinio dydžio X skirstinio grafiką.

Sprendimas.

1. Atsitiktinis dydis X įgyja reikšmę 4 tik tuo atveju, jei kiekvieną kartą metant kauliuką atvirs skaičius 2. Kauliuko metimai yra nepriklausomi. Apskaičiuojame dviejų nepriklausomų įvykių sandaugos tikimybę: $P(X=4)=\frac{3}{6}\cdot\frac{3}{6}=\frac{9}{36}=\frac{1}{4}$.
2. Galimi atvejai:

I kauliukas	2	2	5	2	6	5	5	6	6
II kauliukas	2	5	2	6	2	5	6	5	6
Sumos	4	7	7	8	8	10	11	11	12

$$P(X=7)=\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{6}+\frac{2}{6}\cdot\frac{3}{6}=\frac{12}{36}=\frac{1}{3};$$

$$P(X=8)=\frac{3}{6}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\cdot\frac{3}{6}=\frac{6}{36}=\frac{1}{6};$$

$$P(X=10)=\frac{2}{6}\cdot\frac{2}{6}=\frac{4}{36}=\frac{1}{9};$$

$$P(X=11)=\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{6}=\frac{4}{36}=\frac{1}{9};$$

$$P(X=12)=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{36}.$$

X	4	7	8	10	11	12
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{36}$

3. Atsitiktinio dydžio X matematinė viltis:

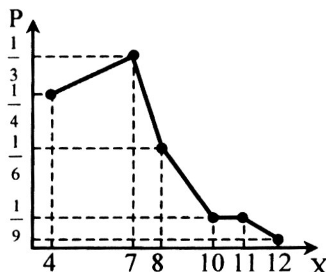
$$EX=4\cdot\frac{1}{4}+7\cdot\frac{1}{3}+8\cdot\frac{1}{6}+10\cdot\frac{1}{9}+11\cdot\frac{1}{9}+12\cdot\frac{1}{36}=7\frac{1}{3}.$$

Atsitiktinio dydžio X dispersija:

$$DX=\left(4-7\frac{1}{3}\right)^2\cdot\frac{1}{4}+\left(7-7\frac{1}{3}\right)^2\cdot\frac{1}{3}+\left(8-7\frac{1}{3}\right)^2\cdot\frac{1}{6}+\left(10-7\frac{1}{3}\right)^2\cdot\frac{1}{9}+$$

$$+\left(11-7\frac{1}{3}\right)^2\cdot\frac{1}{9}+\left(12-7\frac{1}{3}\right)^2\cdot\frac{1}{36}=5\frac{7}{9}.$$

4. Atsitiktinio dydžio X skirstinio grafikas:



3 pavyzdys. Metamos trys monetos: 10 centų, 20 centų ir 50 centų. Atsitiktinis dydis X – atvirtusių centų suma.

1. Užpildykite atsitiktinio dydžio X skirstinio lentelę:

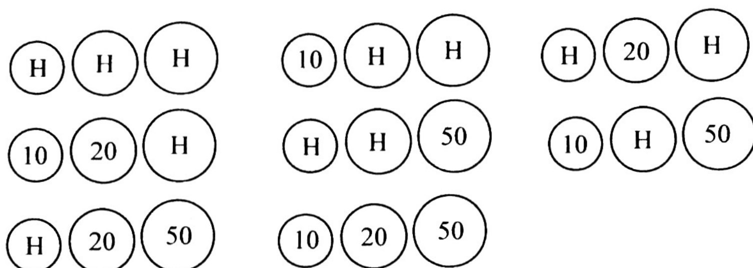
X	0	10	20	30	50	60	70	80
P								

2. Nubraižykite atsitiktinio dydžio X skirstinio grafiką.
3. Raskite atsitiktinio dydžio X matematinę viltį ir dispersiją.
4. Apskaičiuokite tikimybes įvykių:

   $P(X \le 60)$; $P(X \ge 50)$; $P(20 < X < 60)$.

Sprendimas.

1. Galimi variantai:



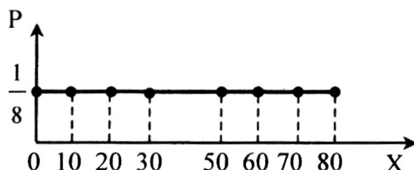
Iš viso turime 8 galimus variantus. Kiekvienas atvejis gali įvykti tik vieną kartą. Vadinasi,

$P(X=0)=\frac{1}{8}$; $P(X=10)=\frac{1}{8}$; $P(X=20)=\frac{1}{8}$; $P(X=30)=\frac{1}{8}$;

$P(X=50)=\frac{1}{8}$; $P(X=60)=\frac{1}{8}$; $P(X=70)=\frac{1}{8}$; $P(X=80)=\frac{1}{8}$.

X	0	10	20	30	50	60	70	80
P	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

2. Atsitiktinio dydžio X skirstinio grafikas:



3. Apskaičiuojame atsitiktinio dydžio X matematinę viltį:

$$EX = 0\cdot\frac{1}{8}+10\cdot\frac{1}{8}+20\cdot\frac{1}{8}+30\cdot\frac{1}{8}+50\cdot\frac{1}{8}+60\cdot\frac{1}{8}+70\cdot\frac{1}{8}+80\cdot\frac{1}{8}=40.$$

Randame atsitiktinio dydžio X dispersiją:

$$DX=(0-40)^2\cdot\frac{1}{8}+(10-40)^2\cdot\frac{1}{8}+(20-40)^2\cdot\frac{1}{8}+(30-40)^2\cdot\frac{1}{8}+$$

$$+(50-40)^2\cdot\frac{1}{8}+(60-40)^2\cdot\frac{1}{8}+(70-40)^2\cdot\frac{1}{8}+(80-40)^2\cdot\frac{1}{8}=750.$$

4. $P(X\le 60)=P(X=0)+P(X=10)+P(X=20)+P(X=30)+$

$$+P(X=50)+P(X=60)=\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{6}{8}=\frac{3}{4};$$

$$P(X\ge 50)=P(X=50)+P(X=60)+P(X=70)+P(X=80)=$$

$$=\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2};$$

$$P(20<X<60)=P(X=30)+P(X=50)=\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}.$$

4 pavyzdys. Iš dėžės, kurioje yra 2 balti ir 4 juodi rutuliai, atsitiktinai išimami 4 rutuliai. Atsitiktinis dydis X – ištrauktų juodų rutulių skaičius. Apskaičiuokite šio atsitiktinio dydžio vidurkį EX, dispersiją DX ir vidutinį kvadratinį nuokrypį σ.

Sprendimas. Sakykime, kad atsitiktinis dydis X – ištrauktų juodų rutulių skaičius.

Galimi variantai:

Juodų rutulių skaičius	2	3	4
Baltų rutulių skaičius	2	1	0

Kadangi dėžėje yra 6 rutuliai, o išimami 4 rutuliai, tai galimų įvykių skaičius: $n = C_6^4 = \frac{6!}{2!4!} = \frac{5 \cdot 6}{2} = 15$.

Ištraukti iš dėžės 2 juodus ir 2 baltus rutulius yra $C_4^2 \cdot C_2^2 = \frac{4!}{2!2!} = 6$ būdai, o tikimybė, kad atsitiktinis dydis įgis reikšmę 2, lygi $P(X=2) = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$.

Ištraukti iš dėžės 3 juodus ir 1 baltą rutulį yra $C_4^3 \cdot C_2^1 = \frac{4!}{3!} \cdot \frac{2!}{1!} = 8$ būdai, o tikimybė, kad atsitiktinis dydis įgis reikšmę 3, lygi $P(X=3) = \frac{8}{15}$.

Ištraukti iš dėžės 4 juodus rutulius yra $C_4^4 = 1$ būdas, o tikimybė, kai atsitiktinis dydis įgis reikšmę 4, lygi $P(X=4) = \frac{1}{15}$.

Atsitiktinio dydžio X skirstinys yra:

X	2	3	4
P	$\frac{2}{5}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{1}{15}$

Atsitiktinio dydžio X matematinė viltis:

$$EX = 2 \cdot \frac{2}{5} + 3 \cdot \frac{8}{15} + 4 \cdot \frac{1}{15} = \frac{8}{3}.$$

Atsitiktinio dydžio X dispersija lygi:

$DX = \left(2-\frac{8}{3}\right)^2 \cdot \frac{2}{5} + \left(3-\frac{8}{3}\right)^2 \cdot \frac{8}{15} + \left(4-\frac{8}{3}\right)^2 \cdot \frac{1}{15} = \frac{16}{45}$, o vidutinis

kvadratinis nuokrypis $\sigma = \frac{4}{3\sqrt{5}} \approx 0,6$.

Atsakymas. $EX = \frac{8}{3}$; $DX = \frac{16}{45}$; $\sigma \approx 0,6$.

5 pavyzdys. Dėžėje yra 3 balti ir 5 juodi rutuliai. Iš dėžės atsitiktinai ištraukiami 5 rutuliai. Atsitiktinis dydis X – ištrauktų baltų rutulių skaičius.

1. Užpildykite lentelę, apibrėžiančią atsitiktinio dydžio X skirstinį.
2. Apskaičiuokite atsitiktinio dydžio X matematinę viltį (vidurkį) EX.

Sprendimas.

1. Galimos bandymo baigtys yra šios:
   a) visi 5 ištraukti rutuliai yra juodi;
   b) ištrauktas 1 baltas ir 4 juodi rutuliai;
   c) ištraukti 2 balti ir 3 juodi rutuliai;
   d) ištraukti 3 balti ir 2 juodi rutuliai.

Vadinasi, atsitiktinis dydis X – ištrauktų baltų rutulių skaičius – gali įgyti šias reikšmes: 0, 1, 2, 3.

Kadangi iš viso dėžėje yra 8 rutuliai, tai 5 rutulius iš 8 galima ištraukti C_8^5 būdais.

a) Tikimybė, kad visi 5 ištraukti rutuliai yra juodi, lygi $\frac{C_5^5}{C_8^5} = \frac{1}{56}$.

Taigi atsitiktinis dydis X įgyja reikšmę 0 su tikimybe

$$P(X=0) = \frac{1}{56}.$$

b) Tikimybė, kad bus ištrauktas 1 baltas ir 4 juodi rutuliai, lygi

$$\frac{C_3^1 \cdot C_5^4}{C_8^5} = \frac{3 \cdot 5}{56} = \frac{15}{56}.$$

Vadinasi, atsitiktinis dydis X įgyja reikšmę 1 su tikimybe

$$P(X=1)=\frac{15}{56}.$$

c) Tikimybė, kad bus ištraukti 2 balti ir 3 juodi rutuliai, lygi

$$\frac{C_3^2\cdot C_5^3}{C_8^5}=\frac{3\cdot 10}{56}=\frac{30}{56}.$$

Taigi atsitiktinis dydis X įgyja reikšmę 2 su tikimybe

$$P(X=2)=\frac{30}{56}.$$

d) Tikimybė, kad bus ištraukti 3 balti ir 2 juodi rutuliai, lygi

$$\frac{C_3^3\cdot C_5^2}{C_8^5}=\frac{1\cdot 10}{56}=\frac{10}{56}.$$

Taigi atsitiktinis dydis X įgyja reikšmę 3 su tikimybe

$$P(X=3)=\frac{10}{56}.$$

Atsitiktinio dydžio X skirstinys, užrašytas lentele, atrodo taip:

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{56}$	$\frac{15}{56}$	$\frac{30}{56}$	$\frac{10}{56}$

2. Randame atsitiktinio dydžio X vidurkį EX:

$$EX=0\cdot\frac{1}{56}+1\cdot\frac{15}{56}+2\cdot\frac{30}{56}+3\cdot\frac{10}{56}=\frac{105}{56}=1\frac{49}{56}.$$

Uždaviniai savarankiškam darbui

1. Ar nurodytos lentelės išreiškia kurio nors atsitiktinio dydžio X skirstinį:

1)

X	0	$\frac{1}{2}$	10	11
P	0,1	0,5	0,1	0,3

2)

X	1	2	3	4
P	0	0,4	0,2	0,3

2. Raskite atsitiktinio dydžio X matematinę viltį ir dispersiją, kai duotos jo pasiskirstymo lentelės:

1)

X	4	6	7
P	0,7	0,2	0,1

2)

X	0	1	2	3
P	0,4	0,3	0,2	0,1

3)

X	5	7	10	15
P	0,2	0,5	0,2	0,1

4)

X	-2	-1	0	1	2
P	0,1	0,2	0,3	0,3	0,1

3. Duota atsitiktinio dydžio X skirstinio lentelė:

1)

X	0	1	2	3
P	0,2	a	$\frac{4}{10}$	0,25

2)

X	2	4	6	8
P	a	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$

Raskite a reikšmę.

4. Atsitiktinio dydžio X skirstinio lentelė:

X	-8	-4	-1	1	3	7
P	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$

Atsitiktinio dydžio Y skirstinio lentelė:

Y	-2	-1	0	1	2	3
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{4}$

Įrodykite, kad atsitiktinio dydžio X ir atsitiktinio dydžio Y matematinės viltys yra lygios, t.y. EX = EY.

5. Šaunama į taikinį. Pataikymo tikimybė lygi $\frac{1}{3}$. Raskite pataikymo į taikinį skaičiaus dispersiją.

6. Metamas lošimo kauliukas. Jei atsiverčia mažiau nei 5 akutės, tai žaidėjas A moka žaidėjui B 10 centų, jei atsiverčia daugiau nei 4 akutės, tai A gauna iš žaidėjo B 20 centų. Atsitiktinis dydis X – žaidėjo A išlošta suma. Raskite atsitiktinio dydžio matematinę viltį ir dispersiją.

7. Iš dėžutės, kurioje yra 2 raudoni ir 3 juodi rutuliai, atsitiktinai ištraukiami du rutuliai. Raskite atsitiktinio dydžio X matematinę viltį, kai X – ištrauktų raudonų rutulių skaičius.

8. Loterijos skritulys suskirstytas į 16 vienodų sektorių, iš kurių vienas sektorius pažymėtas skaičiumi 14, du sektoriai pažymėti skaičiumi 9, trys sektoriai pažymėti skaičiumi 4, keturi sektoriai skaičiumi 1, visi likę sektoriai pažymėti skaičiumi 0. Bilietas, leidžiantis sukti ratą vieną kartą, kainuoja 4 litus. Atsitiktinio dydžio X – laimėjimo dydis – „išsuktas" skaičius, minus bilieto kaina. Apskaičiuokite atsitiktinio dydžio X matematinę viltį ir dispersiją. Raskite tikimybes įvykių:

A – „laimėjimo dydis $X < 0$";

B – „laimėjimo dydis $-3 \le X < 10$".

9. Kioske yra 34 žurnalai „Moteris" po 4,5 Lt, 36 žurnalai „Ji" po 3,5 Lt, 16 žurnalų „Laima" po 5 Lt ir 14 žurnalų „Ieva" po 10 Lt. Atsitiktinis dydis X – paimto žurnalo kaina. Apskaičiuokite atsitiktinio dydžio X matematinę viltį.

10. Medžiotojas ryžosi pabandyti laimę, turėdamas tik keturis šovinius. Pataikymo į bėgantį kiškį tikimybė lygi 0,25. Atsitiktinis dydis X – šūvių į kiškį iki pirmo pataikymo skaičius. Apskaičiuokite atsitiktinio dydžio X matematinę viltį ir dispersiją.

11. Metamos keturios monetos. Atsitiktinis dydis X – skaičiumi atvirtusių monetų skaičius.

1) Užpildykite lentelę, apibrėžiančią atsitiktinio dydžio X skirstinį:

X					
P					

2) Raskite atsitiktinio dydžio X matematinę viltį.

3) Raskite atsitiktinio dydžio X dispersiją.

12. Išleista 10000 loterijos bilietų. 1000 bilietų laimi po 1 Lt, 500 bilietų – po 2 Lt, 200 bilietų – po 5Lt, 100 bilietų – po 10 Lt, 20 bilietų – po 50 Lt ir 10 bilietų – po 100 Lt. Atsitiktinis dydis X – laimėta pinigų suma.

1) Sudarykite atsitiktinio dydžio X skirstinį.

2) Apskaičiuokite atsitiktinio dydžio X matematinę viltį EX ir dispersiją DX.

13. Ant stalo išdėliota 15 vienodo dydžio kortelių, kurių nematoma pusė nuspalvinta. Žinoma, kad 5 kortelių antroji pusė nuspalvinta raudonai, o likusių – žaliai. Kortelės yra išmaišomos ir iš jų atsitiktinai ištraukiamos 3 kortelės. Atsitiktinis dydis X yra ištrauktų kortelių, kurių antroji pusė raudona, skaičius.

1) Parodykite, kad atsitiktinis dydis X įgyja reikšmę O su tikimybe $\frac{24}{91}$.

2) Pabaikite pildyti lentelę, apibrėžiančią atsitiktinio dydžio X skirstinį:

X	0			
P	$\frac{24}{91}$			

3) Apskaičiuokite atsitiktinio dydžio X matematinę viltį EX.

4) Apskaičiuokite atsitiktinio dydžio X dispersiją DX ir vidutinį kvadratinį nuokrypį σ.

14. Turime 8 vienodas korteles, kuriose užrašyti skaičiai

4	4	4	4	4	5	5	5

Ištraukiama kortelė, užrašomas skaičius ir kortelė dedama atgal į krūvą. Atsitiktinai ištraukiama antra kortelė. Atsitiktinis dydis X – nat ištrauktų kortelių užrašytų skaičių suma.

1) Parodykite, kad atsitiktinis dydis X įgyja reikšmę 10 su tikimybe $\frac{9}{64}$.

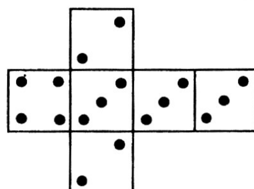
2) Pabaikite pildyti lentelę, apibrėžiančią atsitiktinio dydžio X skirstinį:

X	8	9	10
P			$\frac{9}{64}$

3) Apskaičiuokite atsitiktinio dydžio X matematinę viltį EX.

15. Šešiasienis lošimo kauliukas metamas du kartus. Ant jo sienelių užrašyti skaitmenys 2, 2, 3, 3, 3, 4.





Atsitiktinis dydis X – suma skaitmenų, pasirodžiusių metus kauliuką pirmą ir antrą kartą.

1. Parodykite, kad atsitiktinis dydis X įgyja reikšmę 5 su tikimybe $\frac{1}{3}$.
2. Pabaikite pildyti lentelę, apibrėžiančią atsitiktinio dydžio X skirstinį:

X	4	5	6	7	8
P		$\frac{1}{3}$			

3. Apskaičiuokite atsitiktinio dydžio X matematinę viltį EX ir dispersiją DX.

16. Dėžėje yra 5 raudoni ir 4 žali rutuliai. Iš dėžės atsitiktinai ištraukiami 4 rutuliai. Sakykime, atsitiktinis dydis X – ištrauktų raudonų rutulių skaičius.

1) Parodykite, kad atsitiktinis dydis X įgyja reikšmę lygią 0 su tikimybe $\frac{1}{126}$.

2) Pabaikite pildyti lentelę, apibrėžiančią atsitiktinio dydžio X skirstinį:

X	0				
P	$\frac{1}{126}$				

3) Apskaičiuokite atsitiktinio dydžio X matematinę viltį EX ir dispersiją DX.

17. Dėžutėje yra 4 geltoni ir 6 mėlyni pieštukai. Iš dėžutės atsitiktinai ištraukiami 5 pieštukai. Sakykime, atsitiktinis dydis X – ištrauktų mėlynų pieštukų skaičius.

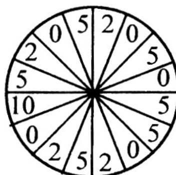
1) Parodykite, kad atsitiktinis dydis X įgyja reikšmę lygią 1 su tikimybe $\frac{6}{252}$.

2) Pabaikite pildyti lentelę, apibrėžiančią atsitiktinio dydžio X skirstinį:

X	1				
P	$\frac{6}{252}$				

3) Apskaičiuokite atsitiktinio dydžio X matematinę viltį EX ir dispersiją DX.

18. Laimės ratas padalytas į 16 lygių sektorių, kurių kiekvienas pažymėtas skaičiumi 0, 2, 5 arba 10. Šie skaičiai reiškia laimėjimo dydį litais. Bilietas, leidžiantis sukti laimės ratą vieną kartą, kainuoja 2 Lt. Sakykime, kad atsitiktinis dydis X – išsukto laimėjimo ir bilieto kainos skirtumas.



1) Raskite atsitiktinio dydžio X skirstinį ir jį užrašykite lentele.

2) Pavaizduokite atsitiktinio dydžio X skirstinį grafiškai.

3) Apskaičiuokite atsitiktinio dydžio X matematinė viltį (vidurkį) EX, dispersiją DX ir vidutinį kvadratinį nuokrypį σ.

4) Apskaičiuokite tikimybes $P\{X \geq 0\}$, $P\{X < 0\}$, $P\{0 \leq X < 9\}$, $P\{EX - \sqrt{DX} < X < EX + \sqrt{DX}\}$, $P\{EX - 2\sqrt{DX} < X < EX + 2\sqrt{DX}\}$.

19. Gėlių kioske parduodamos 5 rūšių gėlės: tulpės, gvazdikai, frezijos, rožės ir lelijos. Gėlių kainos ir kiekiai pateikti lentelėje:

Pavadinimas	Tulpės	Gvazdikai	Frezijos	Rožės	Lelijos
Vieneto kaina	1,50	2	2,50	3	4
Kiekis	35	28	15	12	10

Atsitiktinis dydis X – atsitiktinai paimtos gėlės kaina.

1) Sudarykite atsitiktinio dydžio X skirstinį ir užrašykite jį lentele:

X					
P					

2) Nubrėžkite atsitiktinio dydžio X skirstinio grafiką.

3) Raskite atsitiktinio dydžio X matematinę viltį (vidurkį) EX ir dispersiją DX.

20. Šaulys turi 4 šovinius ir šaudo į taikinį iki pirmo pataikymo arba tol, kol baigiasi šoviniai. Žinoma, kad kiekvieno pataikymo tikimybė lygi 0,8. Atsitiktinis dydis X - iššautų šovinių skaičius.

1) Užpildykite lentelę, apibrėžiančią atsitiktinio dydžio X skirstinį:

X				
P				

2) Apskaičiuokite atsitiktinio dydžio X matematinę viltį EX ir dispersiją DX.

12. Įvairūs uždaviniai

1. Kokia tikimybė, kad atsitiktinai paimto domino kauliuko akučių skaičius bus ne mažesnis už keturis ir ne didesnis už šešis?

2. Dėžutėje yra 20 kortelių, sunumeruotų skaičiais nuo 1 iki 20. Atsitiktinai traukiama viena kortelė. Raskite tikimybes įvykių:

A – „ištrauktas lyginis skaičius";

B – „ištrauktas dalus iš 3 skaičius";

C – „ištrauktas dalus iš 6 skaičius";

D – „ištraukto skaičiaus skaitmenų suma lygi 2";

E – „ištrauktas ne mažesnis už 8 skaičius";

F – „ištrauktas skaičius dalijasi iš 4 arba iš 5".

3. Grupėje yra 6 vaikinai ir 18 merginų. Traukiami burtai, kam atiteks vienas bilietas į teatrą. Kokia tikimybė, kad bilietas teks merginai?

4. Kortelėse parašyti sveikieji skaičiai nuo 1 iki 15 imtinai. Atsitiktinai ištrauktos dvi kortelės. Kokia tikimybė, kad šiose kortelėse parašytų skaičių suma lygi 10?

5. Dėžėje yra 10 vienodų rutulių: 6 žali ir 4 raudoni. Nežiūrint imama po vieną rutulį. Paimtieji rutuliai dedami į kitą dėžę. Apskaičiuokite tikimybę, jog trečiasis rutulys žalias, žinodami, kad pirmieji du buvo skirtingų spalvų.

6. Ant penkių vienodų kortelių parašytos po vieną raidės A, Ė, U, L S. Kortelės užverstos ir sumaišytos. Kokia tikimybė, kad surikiavę jas iš kairės į dešinę, gausime žodį SAULĖ?

7. Duotos 2 cm, 3 cm, 4 cm, 6 cm ir 8 cm ilgio atkarpos. Kokia tikimybė, kad atsitiktinai paėmus tris atkarpas bus galima nubraižyti trikampį?

8. Iš 52 kortų kaladės traukiamos dvi kortos. Kokia tikimybė ištraukti du tūzus?

9. Ridenami du lošimo kauliukai. Kokia tikimybė, kad bent vienas kauliukas atvirs viena akute?

10. Metami du skirtingi lošimo kauliukai. Kokia tikimybė, kad akučių suma lygi 5 arba 6?

11. Darželyje auga 25 raudonos, 40 geltonų ir 35 baltos tulpės. Tamsoje nuskinama viena tulpė. Kokia tikimybė, kad ši tulpė nėra balta?

12. Dėžėje yra 4 futbolo ir 8 tinklinio kamuoliai. Martynas nesirinkdamas išima 6 kamuolius. Kokia tikimybė, kad tarp išimtųjų kamuolių bus ne daugiau kaip du futbolo kamuoliai?

13. Ant stalo išdėliotos devynios kortelės, sunumeruotos nuo 1 iki 9. Jos užverstos ir sumaišytos. Atsitiktinai atverstos trys kortelės. Apskaičiuokite tikimybes šių įvykių:

A – „visų trijų kortelių numeriai yra lyginiai“;

B – „visų trijų kortelių numeriai didesni už 4“;

C – „tarp atverstųjų yra kortelė su penktuoju numeriu“.

14. Kokia tikimybė, kad, atsitiktinai surinkus telefono numerį, jo paskutinis skaitmuo yra skaičiaus 5 arba skaičiaus 3 kartotinis?

15. Dėžėje yra 20 vienodi rutuliai: 12 žalių ir 8 raudoni. Atsitiktinai išimami du rutuliai. Kokia tikimybė, kad jie skirtingų spalvų?

16. Vienodose kortelėse surašyti natūralieji skaičiai nuo 1 iki 25 imtinai. Du kartus atsitiktinai imame po vieną kortelę, negrąžindami atgal. Kokia tikimybė, kad abiejose kortelėse užrašyti skaičiai bus pirminiai?

17. Moneta metama 4 kartus. Kokia tikimybė, kad bent vieną kartą iškris herbas?

18. Tikimybė, kad kukurūzų burbuolė turi 12 eilių sėklų, lygi 0,49, kad turi 14 eilių sėklų – 0,37, kad turi 18 eilių sėklų – 0,14. Kokia tikimybė, kad atsitiktinai paimta burbuolė turės 12 arba 14 eilių sėklų?

19. Tikimybė, kad reikalinga knyga yra miesto bibliotekoje, lygi 0,7, o mokyklos bibliotekoje – 0,3. Kokia tikimybė, kad knyga yra bent vienoje bibliotekoje?

20. Kokia tikimybė, kad metant du lošimo kauliukus, pasirodys skirtingi akučių skaičiai?

21. Du šauliai po vieną kartą šovė į taikinį. Pataikymo galimybės abiejų šaulių atitinkamai lygios 0,6 ir 0,7. Kokia tikimybė, kad:

1) tik vienas šaulys pataikys į taikinį;

2) nors vienas pataikys į taikinį;

3) abu šauliai pataikys;

4) nė vienas nepataikys;

5) nors vienas šaulys nepataikys į taikinį?

22. Į taikinį šaunama tris kartus. Pataikymo tikimybė 0,4. Atsitiktinis dydis X – pataikymų skaičius. Raskite matematinį vidurkį ir dispersiją.

23. Kamuolys mėtomas į krepšį, kol bus pataikyta. Pataikymo tikimybė lygi 0,6. Raskite metimų, kol bus pataikyta, skaičiaus matematinį vidurkį ir dispersiją.

24. Tikimybė, jog Marytė atsakys teisingai į bet kurį testo klausimą, lygi 0,9. Testą sudaro 10 klausimų. Kokia tikimybė, kad Marytė teisingai atsakys į devynis testo klausimus?

25. Mokslo įstaigoje dirba 120 darbuotojų. Iš jų 70 moka anglų kalbą, 60 – vokiečių, o 50 darbuotojų moka abi kalbas. Kokia tikimybė, kad atsitiktinai parinktas darbuotojas nemoka nei anglų, nei vokiečių kalbos?

26. Komandoje iš 12 sportininkų 5 yra sporto meistrai. Kokia tikimybė, kad atsitiktinai atrinkus 3 sportininkus, visi jie bus sporto meistrai?

27. Dėžėje yra 10 detalių, tarp kurių 7 detalės yra dažytos. Atsitiktinai paimamos 4 detalės. Kokia tikimybė, kad visos paimtos detalės bus dažytos?

28. Žmogus užmiršo telefono numerio paskutinį skaitmenį. Kokia tikimybė, kad jis po ne daugiau kaip dviejų bandymų atspės reikiamą skaičių?

29. Dėžėje yra 2 balti ir 4 juodi rutuliai. Du žaidėjai iš dėžės paeiliui traukia po rutulį ir jo į dėžę atgal nededa. Laimi tas, kuris pirmas ištraukia baltą rutulį. Kokia tikimybė, kad baltą rutulį ištrauks pirmasis pradėjęs žaidimą?

30. Dėžėje yra 90 nebrokuotų ir 10 brokuotų detalių. Atsitiktinai iš dėžės išimama 10 detalių. Kokia tikimybė, kad tarp jų: 1) nebus brokuotų; 2) bus bent viena brokuota?

11. Binominiai (Bernulio) bandymai. Bernulio formulė. Binominis skirstinys

Šiame skyrelyje nagrinėsime tik **binominius bandymus**. Binominiu bandymu vadinamas bandymas, turintis šias savybes:

1. Bandymas susideda iš n (n – baigtinis skaičius) vienodų bandymų.

Stebimo įvykio A tikimybė $P(A) = p$ pastovi kiekviename iš bandymų, o įvykiui A priešingo įvykio $\overline{A}$ tikimybė $P(\overline{A}) = 1 - p = q$.

Visi n bandymų yra nepriklausomi.

Binominiai bandymai dar vadinamai **Bernulio bandymais** arba **Bernulio bandymų schema**. Šis pavadinimas prigijo gerbiant įžymųjį šveicarų matematiką Jakobą Bernulį (1654 – 1706).

1 pavyzdys. Moneta metama* 5 kartus $(n = 5)$. Stebime įvykį A – atsivertė herbas. Tai binominis bandymas, susidedantis iš 5 vienodų nepriklausomų bandymų. Stebimo įvykio A tikimybė $P(A) = p = \frac{1}{2}$, o įvykiui A priešingo įvykio $\overline{A}$ ($\overline{A}$ - atsivertė skaičius) tikimybė $P(\overline{A}) = 1 - p = q = \frac{1}{2}$.

2 pavyzdys. Lošimo kauliukas ridenamas 8 kartus. Stebime penkių akučių atsivertimą (įvykį A). Tai binominis bandymas, kuriame stebimo

įvykio A tikimybė $P(A)=p=\frac{1}{6}$, o jau priešingo įvykio $\overline{A}$ ($\overline{A}$ - atsivertė viena, dvi, trys, keturios arba šešios akutės) tikimybė $P(\overline{A})=1-p=q=\frac{5}{6}$.

Tikimybė, kad binominiame bandyme įvykis A įvyks k kartų iš n $(0 \le k \le n)$ lygi:

$$\boxed{P_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k}.}$$

Ši formulė vadinama **Bernulio formule**.

Pateiksime keletą Bernulio formulės pritaikymo pavyzdžių.

1 pavyzdys. Moneta metama 5 kartus.

a) Rasime tikimybę, kad herbas atsivertė 3 kartus.
b) Rasime tikimybę, kad herbas atsivertė ne daugiau kaip 3 kartus.
c) Rasime tikimybę, kad herbas atsivertė ne mažiau kaip 4 kartus.

Sprendimas. Šiame pavyzdyje bandymas – monetos metimas – yra binominis bandymas.

a) $n=5$, $k=3$, $p=\frac{1}{2}$, $q=1-p=\frac{1}{2}$. Reikia rasti $P_5(3)$.

Remiamės Bernulio formule: $P_5(3)=C_5^3 p^3 q^{5-3}=C_5^3 p^3 q^2$;

$$P_5(3)=C_5^3\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2=10\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{4}=\frac{5}{16}.$$

b) Apibrėžkime įvykius:

A_0 - herbas atsivertė 0 kartų (neatsivertė nė vieno karto);

A_1 - herbas atsivertė 1 kartą;

A_2 - herbas atsivertė 2 kartus;

A_3 - herbas atsivertė 3 kartus;

B - herbas atsivertė ne daugiau kaip 3 kartus.

Tada $P(A_0)=P_5(0)=C_5^0\left(\frac{1}{2}\right)^0\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{1}{32}$;

$$P(A_1)=P_5(1)=C_5^1\left(\frac{1}{2}\right)^1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4=5\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{16}=\frac{5}{32};$$

$$P(A_2)=P_5(2)=C_5^2\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3=10\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{8}=\frac{10}{32}=\frac{5}{16};$$

$$P(A_3)=P_5(3)=C_5^3\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2=10\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{4}=\frac{10}{32}=\frac{5}{16}.$$

Kadangi $B=A_0+A_1+A_2+A_3$, o įvykiai A_0, A_1, A_2 ir A_3 yra nesutaikomi, tai $P(B)=P(A_0)+P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)$.

Taigi $P(B)=\frac{1}{32}+\frac{5}{32}+\frac{5}{16}+\frac{5}{16}=\frac{13}{16}$.

c) Apibrėžkime įvykius:

A_4 - herbas atsivertė 4 kartus;

A_5 - herbas atsivertė 5 kartus;

C - herbas atsivertė ne mažiau kaip 4 kartus.

Tada $P(A_4)=P_5(4)=C_5^4\left(\frac{1}{2}\right)^4\cdot\frac{1}{2}=5\cdot\frac{1}{16}\cdot\frac{1}{2}=\frac{5}{32}$;

$$P(A_5)=P_5(5)=C_5^5\left(\frac{1}{2}\right)^5\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^0=1\cdot\frac{1}{32}=\frac{1}{32}.$$

Kadangi $C=A_4+A_5$, o įvykiai A_4 ir A_5 yra nesutaikomi, tai

$$P(C)=P(A_4)+P(A_5),\quad P(C)=\frac{5}{32}+\frac{1}{32}=\frac{3}{16}.$$

2 pavyzdys. Lošimo kauliukas metamas 4 kartus. Kokia tikimybė, kad šešios akutės iškris du kartus ?

Sprendimas. Tai binominis bandymas, kai $n=4$ ir $k=2$. Šiuo atveju $p=\frac{1}{6}$, $q=1-p=\frac{5}{6}$. Reikia rasti $P_4(2)$. Remdamiesi Bernulio formule, gauname $P_4(2)=C_4^2p^2q^{4-2}=C_4^2\left(\frac{1}{6}\right)^2\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^2=6\cdot\frac{1}{36}\cdot\frac{25}{36}=\frac{25}{216}$.

3 pavyzdys. Bandymų stende įsuktos 5 elektros lemputės, kurios dega 1000 valandų. Tikimybė, kad lemputė neperdegs per 1000 valandų, lygi 0,2 ir nepriklauso nuo to, kaip išlaikys bandymą kitos lemputės. Kokia tikimybė, kad bandymą išlaikys (liks neperdegusios) ne mažiau kaip trys lemputės ?

Sprendimas. Galime laikyti, kad atliekame binominį bandymą, kuris susideda iš 5 nepriklausomų bandymų. Bandymų metu stebime – išlaikys ar neišlaikys konkreti lemputė 1000 valandų darbo krūvį.

Apibrėžkime įvykius:

A_3 - bandymą išlaikė (liko neperdegusios) trys lemputės;

A_4 - bandymą išlaikė (liko neperdegusios) keturios lemputės;

A_5 - bandymą išlaikė (liko neperdegusios) penkios lemputės;

B - bandymą išlaikė ne mažiau kaip trys lemputės.

Remdamiesi Bernulio formule, kurioje $p = 0,2$; $q = 1 - 0,2 = 0,8$; $n = 5$; $k = 3, 4, 5$, apskaičiuojame šių įvykių tikimybes:

$$P(A_3)=P_5(3)=C_5^3p^3q^2=C_5^3(0,2)^3\cdot(0,8)^2=10\cdot0,008\cdot0,64=0,0512;$$

$$P(A_4)=P_5(4)=C_5^4p^4q=C_5^4(0,2)^4\cdot0,8=5\cdot0,0016\cdot0,8=0,0064;$$

$$P(A_5)=P_5(5)=C_5^5p^5q^0=C_5^5(0,2)^5=0,00032.$$

Kadangi $B=A_3+A_4+A_5$, o įvykiai A_3, A_4, A_5 yra nesutaikomi, tai:

$$P(B)=P(A_3)+P(A_4)+P(A_5);\quad P(B)=0,0512+0,0064+0,00032=0,05792.$$

Taigi $P(B)\approx0,06$.

4 pavyzdys. Dėžėje yra 20 rutulių: 15 baltų ir 5 juodi. Vienas rutulys išimamas, įsidėmima jo spalva ir ištrauktas rutulys dedamas atgal į dėžę.

Paskui iš jos vėl išimamas vienas rutulys, įsidėmima jo spalva ir pastarasis taip pat dedamas atgal į dėžę ir t.t. Aprašytuoju būdu iš dėžės buvo išimti 5 rutuliai. Kokia tikimybė, kad 2 iš jų yra balti ?

Sprendimas. Tai binominis bandymas, kuris susideda iš 5 nepriklausomų bandymų. Tikimybė kiekvieno bandymo metu ištraukti baltą rutulį lygi $p = \frac{15}{20} = \frac{3}{4}$, o tikimybė, kad bandymo metu baltas rutulys išimtas nebus, lygi $q = 1 - p = \frac{1}{4}$. Aišku, kad $n = 5$ ir $k = 2$. Reikia rasti $P_5(2)$. Remiantis Bernulio formule,

$$P_5(2) = C_5^2 p^2 q^{5-2} = \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2}\left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{45}{512}.$$

Sakykime, atliekame binominį bandymą ir stebime, keliuose iš n vienodų bandymų įvyko mus dominantis įvykis A. Įvykio A pasirodymų skaičius – atsitiktinis dydis. Jį žymėsime raide X. Akivaizdu, kad atsitiktinis dydis X gali įgyti reikšmes 0, 1, 2, … , n. Tikimybę, kad atsitiktinis dydis X įgys reikšmę m, žymėsime $P(X = m)$ ir skaičiuosime remdamiesi Bernulio formule: $P_n(m) = P(X = m) = C_n^m p^m q^{n-m}$, $m = 0, 1, 2, \ldots, n$.

Ši formulė apibrėžia atsitiktinio dydžio X skirstinį, kurį vadiname **binominiu skirtiniu.**

Pavyzdžiui, kai $m = 0$, tai $P_n(0) = P(X = 0) = C_n^0 p^0 q^{n-0} = C_n^0 q^n$,

kai $m = 1$, tai $P_n(1) = P(X = 1) = C_n^1 p^1 q^{n-1}$,

kai $m = 2$, tai $P_n(2) = P(X = 2) = C_n^2 p^2 q^{n-2}$,

....,

kai $m = n$, tai $P_n(n) = P(X = n) = C_n^n p^n q^{n-n} = C_n^n p^n q^0$.

Atsitiktinio dydžio X binominį skirstinį galima užrašyti lentele:

X	0	1	2	…	m	…	n
P	$C_n^0 p^0 q^n$	$C_n^1 p^1 q^{n-1}$	$C_n^2 p^2 q^{n-2}$	…	$C_n^m p^m q^{n-m}$	…	$C_n^n p^n q^0$

Atsitiktinio dydžio X binominis skirstinys priklauso nuo n ir p.

Pavyzdžiui, kai $n = 3$, $p = \frac{1}{6}$, jo lentelė yra tokia:

X	0	1	2	3
P	$C_3^0\left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{125}{216}$	$C_3^1\frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{25}{72}$	$C_3^2\left(\frac{1}{6}\right)^2\frac{5}{6} = \frac{5}{72}$	$C_3^3\left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{1}{216}$

Išnagrinėkime pavyzdį, kuris parodo, kaip sudaromas ir užrašomas lentele konkretaus atsitiktinio dydžio X binominis skirstinys.

Pavyzdys. Šaulys šauna į taikinį keturis kartus. Pataikymo tikimybė lygi 0,7. Atsitiktinis dydis X – pataikymų skaičius. Atsitiktinio dydžio X skirstinį užrašysime lentele.

Sprendimas. Atsitiktinis dydis X – pataikymų skaičius šovus į taikinį keturis kartus – gali įgyti reikšmes 0, 1, 2, 3, 4. Tikimybes, su kuriomis šios reikšmės įgyjamos, randame remdamiesi Bernulio formule:

$$P(X=0)=P_4(0)=C_4^0\cdot(0{,}7)^0\cdot(0{,}3)^4=0{,}0081;$$

$$P(X=1)=P_4(1)=C_4^1\cdot(0{,}7)^1\cdot(0{,}3)^3=0{,}0756;$$

$$P(X=2)=P_4(2)=C_4^2\cdot(0{,}7)^2\cdot(0{,}3)^2=0{,}2646;$$

$$P(X=3)=P_4(3)=C_4^3\cdot(0{,}7)^3\cdot(0{,}3)^1=0{,}4116;$$

$$P(X=4)=P_4(4)=C_4^4\cdot(0{,}7)^4\cdot(0{,}3)^0=0{,}2401.$$

Atsitiktinio dydžio X skirstinį užrašome lentele:

X	0	1	2	3	4
P	0,0081	0,0756	0,2646	0,4116	0,2401

Aišku, kad $P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)=$

$$=0{,}0081+0{,}0756+0{,}2646+0{,}4116+0{,}2401=1.$$

Atsitiktinio dydžio matematinę viltį (vidurkį) EX ir dispersiją DX galime apskaičiuoti remdamiesi formulėmis

$$\boxed{EX = np} \text{ ir } \boxed{DX = npq}.$$

1 pavyzdys. Sakykime, atsitiktinis dydis X – įvykio A pasirodymų skaičius šešiuose nepriklausomuose bandymuose. Įvykio A pasirodymo tikimybė kiekviename iš bandymų lygi 0,4. Rasime atsitiktinio dydžio X matematinę viltį (vidurkį) EX ir dispersiją DX.

Sprendimas. Aišku, kad $n = 6$; $p = 0{,}4$; $q = 1 - 0{,}4 = 0{,}6$. Vadinasi, $EX = 6 \cdot 0{,}4 = 2{,}4$ ir $DX = 6 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6 = 1{,}44$.

2 pavyzdys. Buvo nupirkta 100 loterijos bilietų. Tikimybė, kad bet kuris iš nupirktų bilietų bus laimingas, lygi 0,05. Atsitiktinis dydis X – laimingų bilietų skaičius. Rasime atsitiktinio dydžio X matematinę viltį (vidurkį) EX ir dispersiją DX.

Sprendimas. Galime laikyti, kad atliekame binominį bandymą, susidedantį iš 100 nepriklausomų bandymų. Kadangi $n = 100$; $p = 0{,}05$; $q = 0{,}95$, tai $EX = np$; $EX = 100 \cdot 0{,}05 = 5$;

$DX = npq$; $DX = 100 \cdot 0{,}05 \cdot 0{,}95 = 4{,}75$.

Uždaviniai savarankiškam darbui

1. Moneta metama 10 kartų. Kokia tikimybė, kad herbas atvirs 2 kartus ?

2. Lošimo kauliukas metamas 7 kartus.

a) Kokia tikimybė, kad trys akutės iškris 4 kartus ?

b) Kokia tikimybė, kad trys akutės iškris ne mažiau kaip 5 kartus ?

3. Metami du lošimo kauliukai. Kokia tikimybė, kad juos metus 4 kartus, 7 akių suma iškris ne mažiau kaip 2 kartus ?

4. Šviestuve yra 6 vienodos elektros lemputės. Kiekvienos lemputės tarnavimo laikas nepriklauso nuo kitų lempučių tarnavimo laiko.

Tikimybė, kad lemputė tarnaus metus, lygi $\frac{5}{6}$. Kokia tikimybė, kad per metus dvi šviestuvo lemputes reikės keisti naujomis ?

5. Šaulys šaudo į taikinį. Tikimybė šauliui pataikyti į taikinį iššovus vieną kartą lygi 0,9. Kokia tikimybė, kad iššovęs 6 kartus jis pataikys 5 kartus ?

6. Dėžėje yra 80 nebrokuotų ir 20 brokuotų detalių. Kokia tikimybė, kad iš 5 atsitiktinai paimtų detalių ne mažiau kaip 4 detalės bus nebrokuotos ?

7. Žaidžiame šachmatais su lygiaverčiu varžovu. Kas labiau tikėtina:

a) laimėti 3 partijas iš 4 ar 5 iš 8;

b) laimėti 2 partijas iš 4 ar 3 iš 6;

c) laimėti ne mažiau 3 partijas iš 4 ar ne mažiau 5 partijų iš 8?

8. Moneta metama 5 kartus. Atsitiktinis dydis X – herbo atsivertimų skaičius.

a) Atsitiktinio dydžio X skirstinį užrašykite lentele.

b) Apskaičiuokite atsitiktinio dydžio X matematinę viltį (vidurkį) EX ir dispersiją DX.

9. Šaulys šauna į taikinį 3 kartus. Pataikymo tikimybė lygi 0,2. Atsitiktinis dydis X – pataikymų skaičius.

a) Atsitiktinio dydžio X skirstinį užrašykite lentele;

b) Apskaičiuokite atsitiktinio dydžio X matematinę viltį (vidurkį) EX ir dispersiją DX.

III skyrius
MATEMATINĖS STATISTIKOS PRADMENYS

1. Generalinė aibė ir imtis

Generalinė aibė yra kurių nors objektų, turinčių vieną ir tą patį bendrą požymį, visuma.

Generalinės aibės tūris yra generalinės aibės elementų skaičius.

Imtis yra statistiniam tyrimui pasirinkta tiriamųjų objektų (generalinės aibės elementų) dalis.

Imties tūris yra imties elementų skaičius.

Pavyzdys. Norima patikrinti, ar automatinėmis tekinimo staklėmis pagamintos detalės yra kokybiškos. Jeigu per parą minėtos staklės pagamina 3000 ritinio formos detalių, tai tam, kad išmatuotume kiekvienos iš jų pagrindo skersmenį bei aukštį (ilgį), reikės daug laiko. Todėl iš visų pagamintų detalių atsitiktinai parenkame tam tikrą jų kiekį, pavyzdžiui, 60 ir, jas išmatavę, sprendžiame apie visos produkcijos kokybę. Šiame pavyzdyje generalinė aibė yra visos per pamainą pagamintos detalės, o generalinės aibės tūris lygus 3000. Patikrinimui parinktos detalės sudaro imtį. Imties tūris lygus 60.

Ištyrę generalinės aibės kurios nors imties objektus pagal tam tikrą požymį (pavyzdžiui, nagrinėtame pavyzdyje išmatavę visų 60 imties detalių skersmenį ir aukštį), gauname konkrečią imtį, kurios elementai yra **skaičiai**. Šie skaičiai yra požymio, pagal kurį tiriami visi imties objektai, skaitinė išraiška. Praktikoje, spręsdami įvairius statistikos uždavinius, visada tiriame imtis, kurias sudaro skaičiai, išreiškiantys tam tikrą nagrinėjamos objektų

grupės požymį. Pavyzdžiui, nagrinėtame pavyzdyje iš skaičių sudaryta imtis būtų tokia:

$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{60}$, kur x_1 – pirmosios imties detalės skersmuo, x_2 – antrosios detalės skersmuo, x_3 – trečiosios detalės skersmuo, ..., x_{60} – šešiasdešimtosios detalės skersmuo; čia tarp imties elementų gali būti vienodų skaičių.

Panašią imtį, išreiškiančią tiriamųjų detalių aukštį, galime sudaryti ir iš skaičių $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_{60}$.

Vadinasi, generalinę aibę galima apibrėžti kaip kurio nors atsitiktinio dydžio galimų reikšmių visumą, o imtį – kaip tyrimui parinktą šių reikšmių dalį. Reikia įsidėmėti, kad taip apibrėžta generalinė aibė ir imtis yra sudaryta iš **skaičių**.

Matematinės statistikos pagrindinis uždavinys yra, ištyrus atsitiktinai statistiniam tyrimui paimtą objektų imtį pagal tam tikrą požymį, gauti pagrįstas išvadas apie šio požymio pasiskirstymą visoje objektų grupėje – generalinėje aibėje.

2. Imties skaitinės charakteristikos

Jei imties elementai yra surašyti didėjančia tvarka, tai turime **sutvarkytą imtį**, kuri vadinama **imties variacine eilute**.

Imties plotis (žymimas raide r) yra imties didžiausios x_d ir mažiausios x_m reikšmių skirtumas:

$$r = x_d - x_m .$$

Imties centras (žymimas raide c) yra didžiausios x_d ir mažiausios x_m imties reikšmių aritmetinis vidurkis:

$$c = \frac{x_d + x_m}{2} .$$

Mediana yra skaičius, dalijantis imties tūrį į dvi lygias dalis.

1 pavyzdys. Duota imtis 3, 2, 5, 1. Sudarysime imties variacinę eilutę, apskaičiuosime imties plotį r, centrą c ir medianą.

Sprendimas. Imties variacinė eilutė tokia: 1, 2, 3, 5.

Didžiausias imties elementas yra 5, o mažiausias elementas yra 1. Imties plotis $r = 5 - 1 = 4$, imties centras $c = \frac{5+1}{2} = 3$, imties mediana lygi $\frac{2+3}{2} = 2{,}5$.

2 pavyzdys. Sudarysime imties 0,3; 0,1; 0,3; 0,2; 0,1 variacinę eilutę, rasime imties plotį r, centrą c ir medianą.

Sprendimas. Imties variacinė eilutė tokia: 0,1; 0,1; 0,2; 0,3; 0,3.

Didžiausias imties elementas yra 0,3, o mažiausias elementas yra 0,1. Imties plotis $r = 0{,}3 - 0{,}1 = 0{,}2$, imties centras $c = \frac{0{,}3 + 0{,}1}{2} = 0{,}2$, mediana lygi 0,2.

Imties elemento dažnis (žymimas m_k) yra skaičius, parodantis, kiek kartų elementas x_k pasikartoja imtyje.

Pavyzdys. Imties 6, 8, 5, 6, 10, 5, 6, 10, 8, 6, 10, elemento 6 dažnis lygus 4 , nes elementas 6 imtyje pasikartoja 4 kartus, elemento 8 dažnis lygus 2, nes elementas 8 imtyje pasikartoja 2 kartus, elemento 5 dažnis lygus 2, nes elementas 5 imtyje pasikartoja 2 kartus, elemento 10 dažnis lygus 3, nes elementas 10 imtyje pasikartoja 3 kartus. Elementų dažnių suma lygi imties tūriui: $4 + 2 + 2 + 3 = 11$.

Dažnių lentelė. Stebėjimo duomenys dažniausiai surašomi į lentelę, kurios pirmojoje eilutėje užrašome skirtingas variacinės eilutės reikšmes x_k, o antrojoje – jų dažnius m_k.

Pavyzdys. Imties 6, 8, 5, 6, 10, 5, 6, 10, 8, 6, 10 dažnių lentelė yra:

x_k	5	6	8	10
m_k	2	4	2	3

Imties elemento santykinis dažnis (žymimas p_k^*) yra imties elemento dažnio m_k ir imties elementų skaičiaus n santykis:

$$p_k^* = \frac{m_k}{n}.$$

Pavyzdys. Rasime imties 1, 2, 9, 8, 1, 2, 1, 8, 2, 1 elementų santykinius dažnius. Dažnių lentelė yra:

x_k	1	2	8	9
m_k	4	3	2	1

Imties elementų skaičius n = 10.

Randame imties elementų santykinius dažnius:

elemento 1 santykinis dažnis yra $\frac{4}{10} = 0{,}4$;

elemento 2 santykinis dažnis yra $\frac{3}{10} = 0{,}3$;

elemento 8 santykinis dažnis yra $\frac{2}{10} = 0{,}2$;

elemento 9 santykinis dažnis yra $\frac{1}{10} = 0{,}1$;

Santykinių dažnių suma lygi 1:

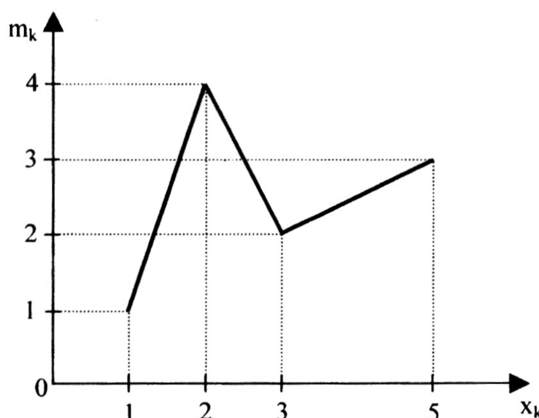
$0{,}4 + 0{,}3 + 0{,}2 + 0{,}1 = 1.$

Dažnių lentelę galima pavaizduoti grafiškai tokiu būdu: abscisių ašyje atidedame imties reikšmes $x_1, x_2, \ldots, x_k$, o ordinačių ašyje – jų atitinkamus dažnius $m_1, m_2, \ldots, m_k$ (arba santykinius dažnius $p_1^*, p_2^*, \ldots, p_k^*$); tiesių atkarpomis sujungiame taškus $(x_k; m_k)$ arba $(x_k; p_k^*)$. Kreivė, jungianti atidėtus taškus, ir yra dažnių lentelės grafinis vaizdas. Ši kreivė vadinama **poligonu**.

Pavyzdžiui, imties 2, 5, 2, 5, 2, 3, 5, 3, 2, 1, dažnių lentelės:

x_k	1	2	3	5
m_k	1	4	2	3

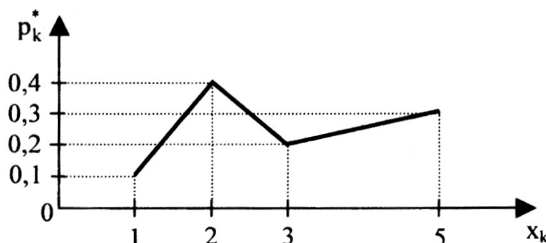
grafinis vaizdas (poligonas) atrodo taip:



Sudarę imties elementų santykinius dažnius $p_k^* = \frac{m_k}{n}$ (mūsų atveju n = 10), galime nubraižyti panašų imties grafinį vaizdą (poligoną), kai Oy ašyje yra atidėti ne elementų dažniai m_k, bet elementų santykiniai dažniai p_k^*. Santykinių dažnių lentelė yra:

x_k	1	2	3	5
p_k^*	0,1	0,4	0,2	0,3

o jos grafinis vaizdas (poligonas):



3. Imties vidurkis ir dispersija

Imties skaitinės charakteristikos yra jos **vidurkis** ir **dispersija**.

Imties $x_1, x_2, \ldots, x_n$ **vidurkiu** (žymimas $\bar{x}$) vadinamas aritmetinis vidurkis:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_k}{n}. \qquad (1)$$

Jei imtis užrašyta dažnių lentele

x_1	x_2	...	x_k
m_1	m_2	...	m_k

tai tokios **sugrupuotos imties vidurkis**, kai k yra grupių skaičius, apskaičiuojamas pagal formulę:

$$\bar{x} = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2 + \ldots + x_k m_k}{n}. \qquad (2)$$

1 pavyzdys. Apskaičiuosime imties 2, 5, 2, 4, 2, 5, 3, 5, 8, 1, 8, 3 vidurkį.

Ši imtis nėra sugrupuota, todėl jos vidurkį skaičiuosime remdamiesi (1) formule:

$$\bar{x} = \frac{2+5+2+4+2+5+3+5+8+1+8+3}{12} = 4.$$

2 pavyzdys. Tarkime, kad imtis užrašyta dažnių lentele

x_k	2	3	4	5	6	7	8	9
m_k	3	1	5	2	3	4	1	6

Čia turime sugrupuotą imtį, kurios grupių skaičius lygus 8. Remiantis (2) formule, šios imties vidurkis lygus:

$$\bar{x} = \frac{2\cdot3+3\cdot1+4\cdot5+5\cdot2+6\cdot3+7\cdot4+8\cdot1+9\cdot6}{25} = 5{,}88.$$

Imties $x_1, x_2, \ldots, x_n$ **dispersija** (žymima S^2) apskaičiuojama pagal formulę:

$$S^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \ldots + (x_n - \bar{x})^2}{n}, \quad (3)$$

čia $\bar{x}$ - imties vidurkis.

Jei imtis užrašyta dažnių lentele

x_1	x_2	...	x_k
m_1	m_2	...	m_k

. tai sugrupuotų duomenų imties dispersija apskaičiuojama pagal formulę

$$S^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 m_1 + (x_2 - \bar{x})^2 m_2 + \ldots + (x_k - \bar{x})^2 m_k}{n}. \quad (4)$$

Imties dispersija S^2 apibūdina stebėjimo duomenų išsibarstymo dydį apie imties vidurkį.

Imties $x_1, x_2, \ldots, x_n$ **vidutiniu kvadratiniu nuokrypiu** vadinama kvadratinė šaknis iš imties dispersijos. Jis žymimas raide S,

$$S = \sqrt{S^2}.$$

1 pavyzdys. Apskaičiuosime imties 5, 2, 1, 1, 3 dispersiją ir vidutinį kvadratinį nuokrypį. Remdamiesi (1) formule, apskaičiuojame imties vidurkį: $\bar{x} = \frac{5+2+1+1+3}{5} = 2{,}4$.

Remiantis (3) formule, šios imties dispersija:

$$S^2 = \frac{(5-2{,}4)^2 + (2-2{,}4)^2 + (1-2{,}4)^2 + (3-2{,}4)^2}{5} = \frac{10{,}16}{5} = 2{,}032.$$

Imties vidutinis kvadratinis nuokrypis: $S = \sqrt{S^2}$; $S = \sqrt{2{,}032} \approx 1{,}43$.

2 pavyzdys. Tarkime, kad žinoma imties dažnių lentelė

x_k	1	2	3	5	6	7	8	9
m_k	2	3	1	3	2	5	4	5

Apskaičiuosime šios imties vidurkį, dispersija ir vidutinį kvadratinį nuokrypį.

Remiantis (2) formule, imties vidurkis:

$$\bar{x} = \frac{1\cdot 2 + 2\cdot 3 + 3\cdot 1 + 5\cdot 3 + 6\cdot 2 + 7\cdot 5 + 8\cdot 4 + 9\cdot 5}{25} = 6;$$

čia $25 = 2 + 3 + 1 + 3 + 2 + 5 + 4 + 5$ – imties elementų skaičius.

Remiantis (4) formule, imties dispersija:

$$S^2 = \frac{(1-6)^2\cdot 2 + (2-6)^2\cdot 3 + (3-6)^2\cdot 1 + (5-6)^2\cdot 3 + (6-6)^2\cdot 2}{25}$$

$$\frac{(7-6)^2\cdot 5 + (8-6)^2\cdot 4 + (9-6)^2\cdot 5}{25} \approx 7{,}04.$$

Imties vidutinis kvadratinis nuokrypis:

$$S = \sqrt{S^2}; \quad S = \sqrt{7{,}04} \approx 2{,}65.$$

3 pavyzdys. Besiruošdami krepšinio rungtynėms, du krepšininkai Saulius ir Paulius 20 kartų po 10 metimų kiekvieną kartą metė iš tos pačios vietos kamuolį į krepšį. Rezultatai buvo tokie:

Saulius

Metimų serijos Nr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Į krepšį įkritusių kamuolių skaičius	8	6	8	5	8	4	3	6	5	4	2	4	7	8	7	5	7	3	8	7

Paulius

Metimų serijos Nr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Į krepšį įkritusių kamuolių skaičius	5	9	3	5	6	7	4	5	8	4	5	7	3	5	8	4	5	6	7	2

Parašykite imčių variacines eilutes, raskite imčių pločius, tūrius. Apskaičiuokite imčių vidurkius, dispersijas, vidutinius kvadratinius nuokrypius. Kuriam krepšininkui sekėsi geriau mėtyti į krepšį?

Sprendimas. *Saulius*: imtis – 8, 6, 8, 5, 8, 4, 3, 6, 5, 4, 2, 4, 7, 8, 7, 5, 7, 3, 8, 7. Imties didžiausioji reikšmė lygi 8, o mažiausioji – 2. Imties plotis $r = 8 - 2 = 6$, o tūris $n = 20$, imties variacinė eilutė – 2, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 6, 6, 7, 7, 7, 7, 8, 8, 8, 8, 8.

Dažnių lentelė

x_k	2	3	4	5	6	7	8
m_k	1	2	3.	3	2	4	5

Remiantis (2) formule, sugrupuotos imties vidurkis:

$$\overline{x_1} = \frac{2\cdot 1 + 3\cdot 2 + 4\cdot 3 + 5\cdot 3 + 6\cdot 2 + 7\cdot 4 + 8\cdot 5}{20} = 5{,}75\,.$$

Remiantis (4) formule, sugrupuotos imties dispersija:

$$S_1^2 = \frac{(2-5{,}75)^2\cdot 1 + (3-5{,}75)^2\cdot 2 + (4-5{,}75)^2\cdot 3 + (5-5{,}75)^2\cdot 3 +}{20}$$

$$\frac{+(6-5{,}75)^2\cdot 2 + (7-5{,}75)^2\cdot 4 + (8-5{,}75)^2\cdot 5}{20} \approx 3{,}59\,.$$

Imties vidutinis kvadratinis nuokrypis:

$$S_1 = \sqrt{S_1^2}\,; \quad S_1 = \sqrt{3{,}59} \approx 1{,}89\,.$$

Paulius: imtis – 5, 9, 3, 5, 6, 7, 4, 5, 8, 4, 5, 7, 3, 5, 8, 4, 5, 6, 7, 2. Imties didžiausioji reikšmė lygi 9, o mažiausioji – 2. Imties plotis $r = 9 - 2 = 7$, o tūris $n = 20$, imties variacinė eilutė – 2, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 6, 6, 7, 7, 7, 8, 8, 9.

Dažnių lentelė

x_k	2	3	4	5	6	7	8	9
m_k	1	2	3	6	2	3	2	1

Remiantis (2) formule, sugrupuotos imties vidurkis:

$$\overline{x}_2 = \frac{2\cdot 1+3\cdot 2+4\cdot 3+5\cdot 6+6\cdot 2+7\cdot 3+8\cdot 2+9\cdot 1}{20} = 5{,}4 .$$

Remiantis (4) formule, sugrupuotos imties dispersija:

$$S_2^2 = \frac{(2-5{,}4)^2\cdot 1+(3-5{,}4)^2\cdot 2+(4-5{,}4)^2\cdot 3+(5-5{,}4)^2\cdot 6+}{20}$$

$$\frac{+(6-5{,}4)^2\cdot 2+(7-5{,}4)^2\cdot 3+(8-5{,}4)^2\cdot 2+(9-5{,}4)^2\cdot 1}{20} \approx 3{,}24 .$$

Imties vidutinis kvadratinis nuokrypis:

$$S_2 = \sqrt{S_2^2}\ ; \quad S_2 = \sqrt{3{,}24} \approx 1{,}8 .$$

Kadangi $S_1 > S_2$, tai Saulius geriau metė į krepšį negu Paulius.

4 pavyzdys. Tadas ir Lukas žaidė kėgliais. Jie atliko po 20 metimų. Rezultatai buvo tokie (sužymėti kiekvieno metimo metu surinkti taškai):

Tadas: 1, 4, 3, 6, 1, 2, 4, 3, 1, 2, 5, 1, 6, 1, 3, 2, 7, 5, 4, 3.

Lukas: 2, 1, 2, 4, 5, 4, 2, 3, 2, 7, 1, 3, 7, 2, 4, 5, 6, 1, 4, 5.

1. Parašykite imčių variacines eilutes (sutvarkytas imtis). Raskite imčių centrus, pločius ir tūrius. Sudarykite imčių dažnių lenteles.
2. Apskaičiuokite imčių vidurkius, dispersijas ir vidutinius kvadratinius nuokrypius.
3. Kuriam žaidėjui geriau sekėsi? Kuris žaidėjas pasižymėjo didesniu stabilumu? Atsakymus pagrįskite.

Sprendimas. 1) *Tadas*: imtis - 1, 4, 3, 6, 1, 2, 4, 3, 1, 2, 5, 1, 6, 1, 3, 2, 7, 5, 4, 3. Imties variacinė eilutė (sutvarkyta imtis) – 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 6, 6, 7. Imties didžiausioji reikšmė lygi 7, o mažiausioji – 1. Imties centras $c = \frac{7+1}{2} = 4$, imties plotis $r = 7-1 = 6$, o tūris $n = 20$.

Dažnių lentelė:

x_k	1	2	3	4	5	6	7
m_k	5	3	4	3	2	2	1

Turime sugrupuotą imtį. Jos vidurkį skaičiuosime remiantis formule:

$$\overline{x} = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2 + \ldots + x_k m_k}{n};$$

$$\overline{x}_T = \frac{1\cdot 5 + 2\cdot 3 + 3\cdot 4 + 4\cdot 3 + 5\cdot 2 + 6\cdot 2 + 7\cdot 1}{20} = 3{,}2.$$

Sugrupuotos imties dispersiją skaičiuosime remiantis formule

$$S^2 = \frac{\left(x_1 - \overline{x}\right)^2 m_1 + \left(x_2 - \overline{x}\right)^2 m_2 + \ldots + \left(x_k - \overline{x}\right)^2 m_k}{n};$$

$$S_T^2 = \frac{(1-3{,}2)^2\cdot 5 + (2-3{,}2)^2\cdot 3 + (3-3{,}2)^2\cdot 4 + (4-3{,}2)^2\cdot 3 + (5-3{,}2)^2\cdot 2}{20} +$$

$$+ \frac{(6-3{,}2)^2\cdot 2 + (7-3{,}2)^2\cdot 1}{20} = 3{,}36.$$

Imties vidutinis kvadratinis nuokrypis:

$S_T = \sqrt{S_T^2}$; $\quad S_T = \sqrt{3{,}36} \approx 1{,}83$.

2) *Lukas*: imtis - 2, 1, 2, 4, 5, 4, 2, 3, 2, 7, 1, 3, 7, 2, 4, 5, 6, 1, 4, 5.

Imties variacinė eilutė (sutvarkyta imtis) – 1, 1 , 1, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 6, 7, 7. Imties didžiausioji reikšmė lygi 7, o mažiausioji – 1. Imties centras $c = \frac{7+1}{2} = 4$, imties plotis $r = 7 - 1 = 6$, o tūris $n = 20$.

Dažnių lentelė:

x_k	1	2	3	4	5	6	7
m_k	3	5	2	4	3	1	2

Randame sugrupuotos imties vidurkį:

$$\overline{x}_L = \frac{1\cdot 3+2\cdot 5+3\cdot 2+4\cdot 4+5\cdot 3+6\cdot 1+7\cdot 2}{20} = 3{,}5.$$

Imties dispersija:

$$S_L^2 = \frac{(1-3{,}5)^2\cdot 3+(2-3{,}5)^2\cdot 5+(3-3{,}5)^2\cdot 2+(4-3{,}5)^2\cdot 4+(5-3{,}5)^2\cdot 3}{20} +$$

$$+\frac{(6-3{,}5)^2\cdot 1+(7-3{,}5)^2\cdot 2}{20} = 3{,}45.$$

Imties vidutinis kvadratinis nuokrypis:

$$S_L = \sqrt{S_L^2}; \qquad S_L = \sqrt{3{,}45} \approx 1{,}86.$$

Matome, kad Tado surinktų taškų imties vidurkis $\overline{x}_T = 3{,}2$, o Luko - $\overline{x}_L = 3{,}5$. Kadangi $\overline{x}_T < \overline{x}_L$, tai Lukui žaisti kėgliais sekėsi geriau.

Tado suriktų taškų imties dispersija $S_T^2 = 3{,}36$, o Luko - $S_L^2 = 3{,}45$. Matome, kad $S_T^2 < S_L^2$, t.y. Luko surinktų taškų imties reikšmės yra labiau išsibarsčiusios ir skiriasi nuo imties vidurkio negu Tado. Vadinasi, žaidimo metu Tadas pasižymėjo didesniu stabilumu negu Lukas.

Dažnai imties dispersiją patogu skaičiuoti taikant formulę:

$$\boxed{S^2 = x_1^2 p_1^* + x_2^2 p_2^* + \ldots x_k^2 p_k^* - \overline{x}^2;} \qquad (5)$$

čia $\overline{x}$ – imties vidurkis, o $p_1^*, p_2^*, \ldots, p_k^*$ – imties elementų santykiniai dažniai.

Pavyzdžiui, išspręstame uždavinyje su krepšininkais imties 8, 6, 8, 5, 8, 4, 3, 6, 5, 4, 2,4, 7, 8, 7, 5, 7, 3, 8, 7 elementų santykiniai dažniai tokie:

elemento 2 santykinis dažnis $p_1^* = \frac{1}{20} = 0{,}05$,

elemento 3 santykinis dažnis $p_2^* = \frac{2}{20} = 0{,}1$,

elemento 4 santykinis dažnis $p_3^* = \frac{3}{20} = 0{,}15$,

elemento 5 santykinis dažnis $p_4^* = \frac{3}{20} = 0{,}15$,

elemento 6 santykinis dažnis $p_5^* = \frac{2}{20} = 0{,}1$,

elemento 7 santykinis dažnis $p_6^* = \frac{4}{20} = 0{,}2$,

elemento 8 santykinis dažnis $p_7^* = \frac{5}{20} = 0{,}25$.

Imties dažnių lentelė atrodo taip:

x_k	2	3	4	5	6	7	8
m_k	1	2	3	3	2	4	5
p_k^*	0,05	0,1	0,15	0,15	0,1	0,2	0,25

Remiantis (5) formule, imties dispersija lygi:

$$S^2 = x_1^2 p_1^* + x_2^2 p_2^* + x_3^2 p_3^* + x_4^2 p_4^* + x_5^2 p_5^* + x_6^2 p_6^* + x_7^2 p_7^* - \overline{x}^2,$$

čia $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $x_3 = 4$, $x_4 = 5$, $x_5 = 6$, $x_6 = 7$, $x_7 = 8$, $p_1^* = 0{,}05$, $p_2^* = 0{,}1$, $p_3^* = 0{,}15$, $p_4^* = 0{,}15$, $p_5^* = 0{,}1$, $p_6^* = 0{,}2$, $p_7^* = 0{,}25$, o $\overline{x} = 5{,}75$.

$$S^2 = 2^2 \cdot 0{,}05 + 3^2 \cdot 0{,}1 + 4^2 \cdot 0{,}15 + 5^2 \cdot 0{,}15 + 6^2 \cdot 0{,}1 + 7^2 \cdot 0{,}2 +$$
$$+ 8^2 \cdot 0{,}25 - 5{,}75^2 \approx 3{,}59.$$

Imties 5, 9, 3, 5, 6, 7, 4, 5, 8, 4, 5, 7, 3, 5, 8, 4, 5, 6, 7, 2 dažnių lentelė yra:

x_k	2	3	4	5	6	7	8	9
m_k	1	2	3	6	2	3	2	1
p_k^*	0,05	0,1	0,15	0,3	0,1	0,15	0,1	0,05

Imties vidurkis lygus $\overline{x} = 5{,}4$.

Remiantis (5) formule, imties dispersija lygi:

$$S^2 = 2^2 \cdot 0{,}05 + 3^2 \cdot 0{,}1 + 4^2 \cdot 0{,}15 + 5^2 \cdot 0{,}3 + 6^2 \cdot 0{,}1 + 7^2 \cdot 0{,}15 + 8^2 \cdot 0{,}1 +$$

$$+ 9^2 \cdot 0{,}05 - 5{,}4^2 = 3{,}24.$$

Uždaviniai savarankiškam darbui

1. Matuojant penkiolikos jaunų medelių aukštį, gauti tokie rezultatai (decimetrais): 5; 7; 9; 10; 6; 8; 5; 10; 7; 5; 8; 8; 9; 5; 9.

1. Sutvarkykite imtį.

2. Lentelėje surašykite jos elementų dažnius ir santykinius dažnius.

3. Apskaičiuokite dažnių bei santykinių dažnių sumas.

2. Tikrinant dvidešimt penkiuose induose esančio pieno riebumą, gauti tokie duomenys (%):

1,1	3,2	3,2	2,4	1,7
2,2	3,5	4,2	3,2	2,2
2,2	2,4	1,7	1,7	2,7
3,2	4,2	3,8	1,4	2,4
2,7	2,1	1,4	3,2	1,7

1. Sutvarkykite imtį.

2. Lentelėje surašykite jos elementų dažnius ir santykinius dažnius.

3. Apskaičiuokite dažnių bei santykinių dažnių sumas.

3. Parduotuvė per dvi dienas pardavė 50 vyriškų kojinių, kurių dydžiai tokie:

27; 28; 31; 26; 25; 27; 28; 28; 30; 27;
26; 27; 25; 28; 29; 28; 27; 25; 26; 27;
28; 26; 26; 27; 28; 29; 28; 26; 27; 28;
29; 27; 28; 27; 30; 26; 27; 28; 28 29;
30; 28; 27; 26; 25; 28; 25; 29; 29; 30.

1. Imtį užrašykite dažnių lentele.

2. Raskite imties vidurkį ir dispersiją.

3. Nubraižykite poligoną.

4. Per antrąjį trimestrą Mantas iš matematikos gavo tokius balus: 8; 8; 10; 9; 6; 7; 8; 6; 7; 8.

1. Sutvarkykite imtį.

2. Apskaičiuokite imties centrą, plotį, vidurkį.

3. Apskaičiuokite imties elementų dažnių ir santykinių dažnių sumas.

5. Apskaičiuokite imties 6, 6, 7, 4, 3, 1, 2, 1, 9, 5 vidurkį $\bar{x}$, dispersiją S^2 ir vidutinį kvadratinį nuokrypį S.

6. Atsitiktinai paimtų 10 bulvių masė (gramais) yra: $x_1 = 40$; $x_2 = 50$; $x_3 = 60$; $x_4 = 100$; $x_5 = 60$; $x_6 = 70$; $x_7 = 50$; $x_8 = 70$; $x_9 = 100$; $x_{10} = 80$.

Apskaičiuokite šios imties plotį r, imties centrą c, imties vidurkį $\bar{x}$.

7. Matematikos varžybose moksleiviams buvo pasiūlyta išspręsti 20 uždavinių. Kiekvienas uždavinys vertinamas nuo 0 iki 10 balų. Šiose varžybose dalyvavo Lukas ir Rimas, kurie pasiekė tokių rezultatų:

Lukas – 4, 8, 4, 3, 6, 1, 1, 5, 5, 7, 8, 4, 8, 7, 5, 6, 4, 8, 9, 4.

Rimas – 2, 4, 6, 7, 7, 4, 6, 7, 8, 8, 6, 7, 4, 6, 7, 2, 4, 6, 8, 6.

1. Parašykite imčių variacines eilutes, raskite imčių pločius ir tūrius.

2. Lentelėse surašykite imčių elementų dažnius ir santykinius dažnius.

3. Apskaičiuokite imčių vidurkius, dispersijas ir vidutinius kvadratinius nuokrypius.

4. Kuriam moksleiviui geriau sekėsi dalyvauti varžybose?

8. Kontrolierius 10 dienų tikrino gaminių kokybę ir šiomis dienomis nustatė tokius nekokybiškų gaminių kiekius: 12, 8, 13, 4, 7, 17, 16, 5, 14, 18. Apskaičiuokite šios imties plotį r, imties centrą c ir imties vidurkį $\overline{x}$.

9. Kontrolierius dvylika dienų tikrino keleivius miesto visuomeniniame transporte ir šiomis dienomis nustatė tiek „zuikių“: 7, 3, 0, 4, 10, 5, 6, 2, 1, 3, 6, 1. Apskaičiuokite šios imties plotį r, imties centrą c ir imties vidurkį $\overline{x}$.

10. Krepšininkas sužaidė 11 rungtynių ir jose pelnė tiek taškų: 8, 12, 9, 6, 14, 7, 14, 15, 5, 2, 18. Apskaičiuokite šios imties vidurkį $\overline{x}$, dispersiją S^2 ir vidutinį kvadratinį nuokrypį S.

11. Krepšininkas po kiekvienos treniruotės dar papildomai metė 20 tritaškių. Vienuolikos treniruočių serijoje jo įmestų tritaškių skaičiai buvo tokie: 13, 9, 7, 12, 14, 8, 10, 15, 11, 10, 12. Apskaičiuokite šios imties vidurkį $\overline{x}$, dispersiją S^2 ir vidutinį kvadratinį nuokrypį S.

12. Šuolio į tolį varžybose užfiksuoti tokie rezultatai (metrais): 2,75; 2,85; 3,3; 2,7; 2,8; 3,05; 2,9; 2,65; 3,95; 3,85; 2,53.

1. Nustatykite imties tūrį.

2. Raskite imties plotį, imties centrą, medianą.

3. Apskaičiuokite imties vidurkį ir dispersiją.

13. Vairavimo mokykloje buvo tikrinamas dviejų grupių kursantų reakcijos į šviesos signalo pasikeitimą greitis. Gauti šitokie duomenys (sekundžių šimtosiomis dalimis): 1 – osios grupės – 36, 38, 58, 46, 24, 56, 40, 28, 52, 48, 26, 53, 41; 2 – osios grupės – 24, 36, 30, 38, 40, 46, 48, 54, 44, 39, 41.

1. Raskite imčių pločius, centrus ir medianas.

2. Apskaičiuokite imčių vidurkius ir dispersijas.

3. Kokias išvadas galima daryti apie grupių reakcijų greitį?

14. Dvi abiturientų klasės dalyvavo mokyklos matematikos olimpiadoje: 16 moksleivių iš 12^a klasės ir 20 – iš 12^b klasės. Komisija pateikė tokius olimpiados rezultatus:

Išspręstų uždavinių skaičius	5	4	3	2	1
Juos išsprendusių 12^a kl. mokinių skaičius	6	3	4	1	2
Juos išsprendusių 12^b kl. mokinių skaičius	6	4	3	4	3

Apskaičiuokite abiejų klasių imčių vidurkius ir dispersijas. Kuri klasė sėkmingiau pasirodė olimpiadoje? Kuri klasė pasižymėjo didesniu stabilumu?

15. Jonas ir Petras žaidė kėgliais. Jie atliko po 16 metimų. Jono ir Petro surinktų taškų serijos pateiktos lentelėje:

Taškų skaičius viename metime	0	1	2	3	4	5	6	7
Jono metimų skaičius	2	1	3	3	3	2	1	1
Petro metimų skaičius	1	3	2	4	1	3	1	1

Apskaičiuokite abiejų žaidėjų imčių vidurkius ir dispersijas. Kuris žaidėjas pasirodė sėkmingiau? Kuris žaidėjas pasižymėjo didesniu stabilumu?

16. Dvi abiturientų klasės dalyvavo mokyklos matematikos olimpiadoje: 16 moksleivių iš 12^a klasės ir 20 – iš 12^b klasės. Vertinimo komisija pripažino moksleiviams tokius balus:

12^a klasė: 1, 1, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, 5.

12^b klasė: 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, 5.

Apskaičiuokite abiejų klasių imčių vidurkius ir dispersijas. Palyginę vidurkius, nustatykite, kuri klasė sėkmingiau pasirodė olimpiadoje. Pagal dispersijas nustatykite, kuri klasė pasižymėjo didesniu stabilumu.

17. 30 vienos vidurinės mokyklos abiturientų laikė stojamuosius egzaminus į aukštąsias mokyklas ir surinko tiek balų iš 40 galimų: 34, 21, 22, 34, 18, 20, 38, 27, 28, 25, 26, 28, 30, 32, 26, 21, 24, 27, 34, 25, 24, 27, 25, 25, 26, 27, 20, 22, 24, 27.

1. Sudarykite imties variacinę eilutę.

2. Sudarykite dažnių lentelę.

3. Nubraižykite poligoną.

18. Jonas ir Petras žaidė kėgliais. Jie atliko po 16 metimų.

Jono surinkti taškai: 0, 0, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 6, 7.

Petro surinkti taškai: 0, 1, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 5, 5, 5, 6, 7.

Apskaičiuokite abiejų žaidėjų imčių vidurkius ir dispersijas. Pagal vidurkius nustatykite, kuris žaidėjas pasirodė sėkmingiau. Pagal dispersijas nustatykite, kuris žaidėjas pasižymėjo didesniu stabilumu?

19. Bandomajame sklype tiriant morkų derlingumą, buvo matuojamas (5 mm tikslumu) morkų ilgis. Gauti rezultatai pateikti lentelėje:

Morkos ilgis	150	160	170	190	200
Skaičius	6	8	17	7	2

1. Raskite imties tūrį.

2. Apskaičiuokite santykinius dažnius.

3. Apskaičiuokite imties vidurkį ir dispersiją.

4. Nubraižykite poligoną.

4. Stebėjimo duomenų grupavimas

Paprastai kurios nors objektų grupės tyrimo pagal tam tikrą požymį procese stebėjimo duomenų gauname labai daug. Jie dažniausiai būna išsibarstę, "negražūs". Su tokiais duomenimis sunku atlikti bet kokius skaičiavimus, taip pat sunku nustatyti kokius nors dėsningumus.

Pavyzdžiui, matuojant 50 septyniolikmečių jaunuolių ūgį, gauti tokie rezultatai (centimetrais):

166, 191, 171, 189, 182, 173, 179, 156, 171, 162
183, 188, 185, 177, 165, 173, 167, 175, 176, 180,
177, 160, 181, 168, 174, 178, 187, 192, 184, 190,
175, 148, 186, 163, 170, 196, 183, 175, 158, 176,
177, 182, 179, 178, 185, 184, 172, 180, 173, 183.

Matome, kad šie skaičiai – nesutvarkyta informacija. Remiantis tokia nesutvarkyta informacija, sunku daryti kokias nors išvadas, apie septyniolikmečių jaunuolių ūgį, todėl statistiniai duomenys yra sutvarkomi. Skaičiavimams palengvinti stebėjimo duomenys paprastai yra apvalinami ir **grupuojami**. Grupuojant duomenis, intervalas, kuriame telpa visi stebėjimo duomenys $x_1, x_2, \ldots, x_n$, paprastai skaidomas į vienodo ilgio mažesnius dalinius intervalus. Dažniausiai pasirenkama nuo 5 iki 20 dalinių intervalų. Kuo daugiau duomenų, tuo daugiai pasirenkama intervalų.

Sakykime, didžiausioji imties $x_1, x_2, \ldots, x_n$ reikšmė yra x_d, o mažiausioji – x_m. Tada visos imties reikšmės (visi stebėjimo duomenys) telpa į vieną intervalą $[x_m; x_d]$, kurio ilgis yra $x_d - x_m$. Tarkime, kad šį intervalą norime padalinti į dalinius intervalus, kurių ilgis bus h. Intervalą $[x_m; x_d]$ galėsime lengvai padalinti į ilgio h dalinius intervalus tik tada, kai jo ilgis $x_d - x_m$ yra skaičiaus h kartotinis. Dažniausiai intervalą $[x_m; x_d]$ (jeigu jo ilgis $x_d - x_m$ nėra skaičiaus h kartotinis) pakeičiame kitu intervalu $[x_m^{\prime}; x_d^{\prime}]$, kur $x_m^{\prime} < x_m$, $x_d^{\prime} > x_d$, tokiu, kad jo ilgis $x_d^{\prime} - x_m^{\prime}$ būtų skaičiaus h kartotinis.

Pateiktame pavyzdyje su septyniolikmečių jaunuolių ūgiais, didžiausias imties narys yra $x_d = 196$, o mažiausias – $x_m = 148$. Vadinasi, visi stebėjimo duomenys telpa į vieną intervalą [148; 196]. Šio intervalo ilgis lygus 48 (196 – 148 = 48). Intervalą [148; 196] patogu pakeisti kitu intervalu [145; 200], kurio ilgis lygus 55 (200 – 145 = 55). Kadangi skaičius 55 yra skaičiaus 5 kartotinis (55 = 5 · 11), tai naują intervalą [145; 200] lengva padalinti į 11 mažesnių dalinių intervalų:

[145; 150), [150; 155), [155; 160), [160; 165), [165; 170), [170; 175), [175; 180), [180; 185), [185; 190), [190; 195), [195; 200),

kurių kiekvieno ilgis lygus 5.

* * *

Dalinio intervalo dažniu vadinamas imties reikšmių, patekusių į šį intervalą, skaičius. Jis žymimas n_i; čia i – dalinio intervalo numeris.

Dalinio intervalo santykiniu dažniu vadinamas šio intervalo dažnio n_i ir imties tūrio N santykis: $\boxed{f_i = \frac{n_i}{N}}$; čia i – dalinio intervalo numeris.

Dalinių intervalų dažnių suma lygi imties tūriui N (imties elementų skaičiui), o santykinių dažnių suma lygi 1.

Grįžkime prie pavyzdžio su septyniolikmečių jaunuolių ūgiais.
Sugrupavę imtį, gavome 11 dalinių intervalų [145; 150), [150; 155), [155; 160), [160; 165), [165; 170), [170; 175), [175; 180), [180; 185), [185; 190), [190; 195), [195; 200).

Į pirmąjį dalinį intervalą [145; 150) patenka 1 imties reikšmė 148, todėl šio dalinio intervalo dažnis $n_1 = 1$, o santykinis dažnis $f_1 = \frac{1}{50} = 0{,}02$ (čia N = 50 – imties elementų skaičius, t.y. imties tūris).

Į antrąjį dalinį intervalą [150; 155) nepatenka nė viena imties reikšmė, todėl šio dalinio intervalo dažnis $n_2 = 0$, santykinis dažnis $f_2 = \frac{0}{50} = 0$.

Į trečiąjį dalinį intervalą [155; 160) patenka 2 imties reikšmės 156, 158, todėl šio dalinio intervalo dažnis $n_3 = 2$, o santykinis dažnis $f_3 = \frac{2}{50} = 0{,}04$.

Į ketvirtąjį dalinį intervalą [160; 165) patenka 3 imties reikšmės 160, 162, 163, todėl šio dalinio intervalo dažnis $n_4 = 3$, o santykinis dažnis $f_4 = \frac{3}{50} = 0{,}06$.

Į penktąjį dalinį intervalą [165; 170) patenka 4 imties reikšmės 165, 166, 167, 168, todėl šio dalinio intervalo dažnis $n_5 = 4$, o santykinis dažnis $f_5 = \frac{4}{50} = 0{,}08$.

Į šeštąjį dalinį intervalą [170; 175) patenka 8 imties reikšmės 170, 171, 171, 172, 173, 173, 173, 174, todėl šio dalinio intervalo dažnis $n_6 = 8$, o santykinis dažnis $f_6 = \frac{8}{50} = 0{,}16$.

Į septintąjį dalinį intervalą [175; 180) patenka dvylika imties reikšmių 175, 175, 175, 176, 176, 177, 177, 177, 178, 178, 179, 179, todėl šio dalinio intervalo dažnis $n_7 = 12$, o santykinis dažnis $f_7 = \frac{12}{50} = 0{,}24$.

Į aštuntąjį dalinį intervalą [180; 185) patenka 10 imties reikšmių 180, 180, 181, 182, 182, 183, 183, 183, 184, 184, todėl šio dalinio intervalo dažnis $n_8 = 10$, o santykinis dažnis $f_8 = \frac{10}{50} = 0{,}2$.

Į devintąjį dalinį intervalą [185; 190) patenka 6 imties reikšmės 185, 185, 186, 187, 188, 189, todėl šio dalinio intervalo dažnis $n_9 = 6$, o santykinis dažnis $f_9 = \frac{6}{50} = 0{,}12$.

Į dešimtąjį dalinį intervalą [190; 195) patenka 3 imties reikšmės 190, 191, 192, todėl šio dalinio intervalo dažnis $n_{10} = 3$, o santykinis dažnis $f_{10} = \frac{3}{50} = 0{,}06$.

Į vienuoliktąjį dalinį intervalą [195; 200) patenka 1 imties reikšmė 196, todėl šio dalinio intervalo dažnis $n_{11} = 1$, o santykinis dažnis $f_{11} = \frac{1}{50} = 0{,}02$.

Dalinių intervalų dažnių suma lygi imties tūriui (imties elementų skaičiui) t.y. 1 + 0 + 2 + 3 + 4 + 8 + 12 + 10 + 6 + 3 + 1 = 50, o santykinių dažnių suma lygi 1, t.y. 0,02 + 0 + 0,04 + 0,06 + 0,08 + 0,16 + 0,24 + 0,2 + + 0,12 + 0,06 + 0,02 = 1.

* * *

Jei stebėjimo duomenis esame suskirstę į k dalinių intervalų, t.y. esame juos sugrupavę, be to, apskaičiavę kiekvieno dalinio intervalo $[t_i; t_{i+1}]$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ dažnį n_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$, santykinį dažnį f_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$, tai visus šiuos skaičiavimų rezultatus patogu surašyti į lentelę

Dalinio intervalo numeris i	Dalinis intervalas $[t_i; t_{i+1}]$	Dalinio intervalo dažnis n_i	Dalinio intervalo santykinis dažnis f_i
1	$[t_1 ; t_2)$	n_1	f_1
2	$[t_2 ; t_3)$	n_2	f_2
3	$[t_3 ; t_4)$	n_3	f_3
⋮	⋮	⋮	⋮
k	$[t_k ; t_{k+1})$	n_k	f_k

Ši sugrupuota duomenų lentelė dar vadinama **klasifikuotos imties dažnių lentele**.

Grįžkime prie nagrinėto pavyzdžio su septyniolikmečių jaunuolių ūgiais. Dažnių lentelė šiuo konkrečiu atveju atrodo taip:

Dalinio intervalo numeris i	Dalinis intervalas $[t_i; t_{i+1}]$	Dalinio intervalo dažnis n_i	Dalinio intervalo santykinis dažnis f_i
1	[145; 150)	1	0,02
2	[150; 155)	0	0
3	[155; 160)	2	0,04
4	[160; 165)	3	0,06
5	[165; 170)	4	0,08
6	[170; 175)	8	0,16
7	[175; 180)	12	0,24
8	[180; 185)	10	0,2
9	[185; 190)	6	0,12
10	[190; 195)	3	0,06
11	[195; 200)	1	0,02
	Dažnių suma:	50	1

* * *

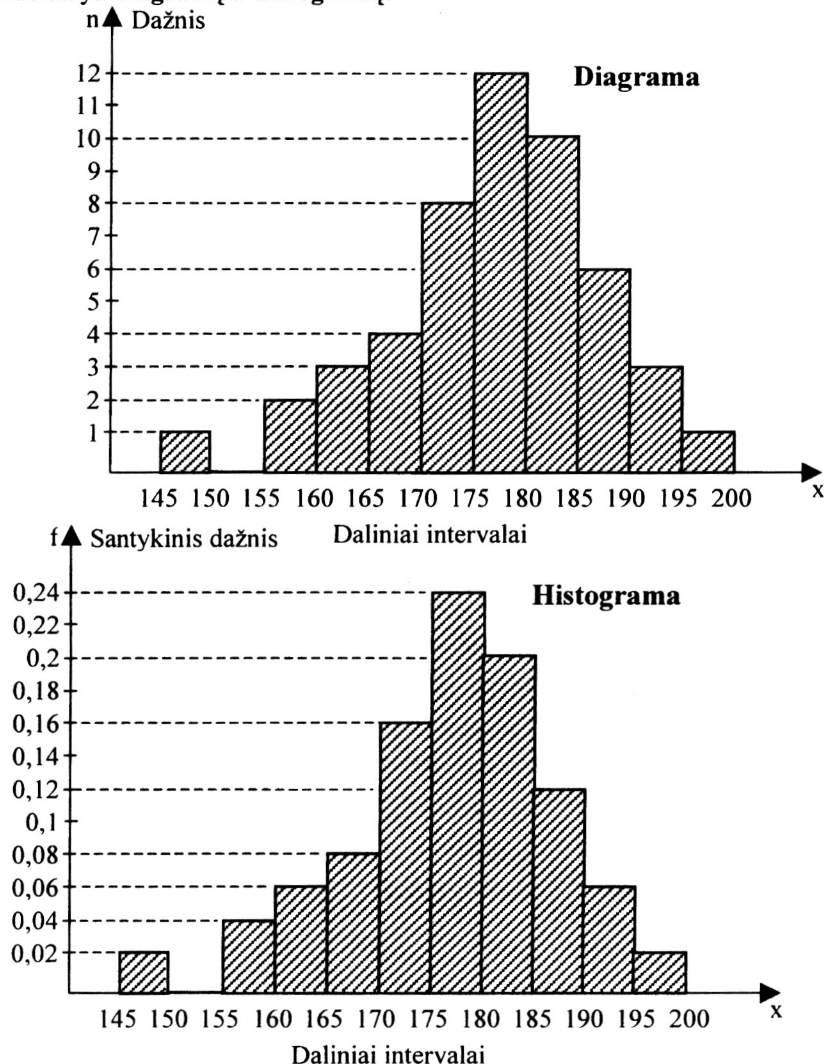
Turėdami klasifikuotos imties dažnių lentelę galime lengvai nubraižyti grafinį imties vaizdą – **diagramą** arba **histogramą**.

Histogramą braižome tokiu būdu: Ox ašyje atidedame dalinius intervalus, o Oy ašyje jų santykinius dažnius f_i; po to virš kiekvieno intervalo braižomas stulpelis, kurio aukštis lygus santykiniam dažniui $f_i = \frac{n_i}{N}$; gautoji laiptuota figūra, sudaryta iš stačiakampių, ir yra **histograma**. Jei braižomo stulpelio aukštis lygus į intervalą patekusių duomenų skaičiui, t.y. intervalo dažniui n_i, tai šiuo atveju tokiu pat būdu gauta laiptuota figūra, sudaryta iš stačiakampių, vadinama **diagrama**.

Histograma (diagrama) rodo, kokiomis proporcijomis pasiskirstę duomenys pasirinktuose intervaluose.

Akivaizdu, kad diagrama ir histograma skiriasi tik masteliu.

Vėl grįžkime prie pavyzdžio su septyniolikmečių jaunuolių ūgiais. Imties dažnių lentelę jau buvome užpildę. Remiantis dažnių lentele, lengva nubraižyti **diagramą ir histogramą**:



Iš diagramos (histogramos) vaizdžiai matyti, kaip pasiskirstę matavimo duomenys (jaunuolių ūgiai) atitinkamuose intervaluose.

Uždavinių sprendimo pavyzdžiai

1 pavyzdys. Matuojant 25 induose esančių druskos rūgšties tirpalų procentinę koncentraciją, gauti tokie duomenys:

2,66	2,96	2,88	2,57	2,71
2,70	3,21	2,58	2,91	2,89
2,83	3,20	3,00	2,69	3,02
3,17	2,92	2,67	2,64	3,14
3,24	3,19	2,77	3,06	3,23

Paėmę dalinio intervalo ilgį, lygų 0,1, sugrupuosime imties elementus, t.y. suskirstysime juos į dalinius intervalus, kurių ilgis lygus 0,1. Rasime dalinių intervalų dažnius bei santykinius dažnius. Užrašysime imtį dažnių lentele. Rasime dalinių intervalų dažnių bei santykinių dažnių sumas. Nubraižysime histogramą ir diagramą.

Sprendimas. Mažiausioji imties reikšmė yra 2,57, o didžiausioji – 3,24. Imties intervalas yra [2,57; 3,24]. Šio intervalo ilgis yra 3,24 – 2,57 = 0,67 ir todėl šis intervalas "blogai" dalijasi į 0,1 ilgio intervalus. Paimsime tokį intervalą, kurio ilgis būtų skaičiaus 0,1 kartotinis. Kairįjį intervalo [2,57; 3,24] galą 2,57 sumažinkime iki skaičiaus 2,55, o dešinįjį 3,24 padidinkime iki 3,25. Gauname intervalą [2,55; 3,25], kurio ilgis yra 3,25 – 2,55 = 0,7, t.y. skaičiaus 0,1 kartotinis; pastarasis intervalas lengvai padalijamas į 7 dalinius intervalus [2,55; 2,65), [2,65; 2,75), [2,75; 2,85), [2,85; 2,95), [2,95; 3,05), [3,05; 3,15), [3,15; 3,25), kurių kiekvieno ilgis yra 0,1. Randame, kiek imties reikšmių patenka į kiekvieną iš 7 dalinių intervalų, t.y. randame dalinių intervalų $[t_i; t_{i+1}]$ dažnius n_i, $i = 1, 2, \ldots, 7$.

Apskaičiuojame intervalų santykinius dažnius $f_i = \frac{n_i}{N}$, $i = 1, 2, \ldots, 7$; $N = 25$.

Skaičiavimai:

Į pirmąjį dalinį intervalą [2,55; 2,65) patenka trys imties reikšmės: 2,57; 2,58; 2,64. Vadinasi, šio intervalo dažnis $n_1 = 3$, o santykinis dažnis

$f_1 = \frac{n_1}{N}$; $f_1 = \frac{3}{25} = 0,12$; čia N = 25 – imties elementų skaičius.

Į antrąjį dalinį intervalą [2,65; 2,75) patenka penkios imties reikšmės: 2,66; 2,67; 2,69; 2,70; 2,71. Vadinasi, šio intervalo dažnis $n_2 = 5$, o santykinis dažnis $f_2 = \frac{n_2}{N}$; $f_2 = \frac{5}{25} = 0,2$.

Į trečiąjį dalinį intervalą [2,75; 2,85) patenka dvi imties reikšmės: 2,77; 2,83. Vadinasi, šio intervalo dažnis $n_3 = 2$, o santykinis dažnis $f_3 = \frac{n_3}{N}$;

$f_3 = \frac{2}{25} = 0,08$.

Į ketvirtąjį dalinį intervalą [2,85; 2,95) patenka keturios imties reikšmės: 2,86; 2,89; 2,91; 2,92. Vadinasi, šio intervalo dažnis $n_4 = 4$, o santykinis dažnis

$f_4 = \frac{4}{25} = 0,16$.

Į penktąjį dalinį intervalą [2,95; 3,05) patenka trys imties reikšmės: 2,96; 3,00; 3,02. Vadinasi, šio intervalo dažnis $n_5 = 3$, o santykinis dažnis

$f_5 = \frac{3}{25} = 0,12$.

Į šeštąjį dalinį intervalą [3,05; 3,15) patenka dvi imties reikšmės: 3,06; 3,14. Vadinasi, šio intervalo dažnis $n_6 = 2$, o santykinis dažnis

$f_6 = \frac{2}{25} = 0,08$.

Į septintąjį dalinį intervalą [3,15; 3,25) patenka šešios imties reikšmės: 3,17; 3,19; 3,20; 3,21; 3,23; 3,24. Vadinasi, šio intervalo dažnis $n_7 = 6$, o santykinis dažnis $f_7 = \frac{6}{25} = 0,24$.

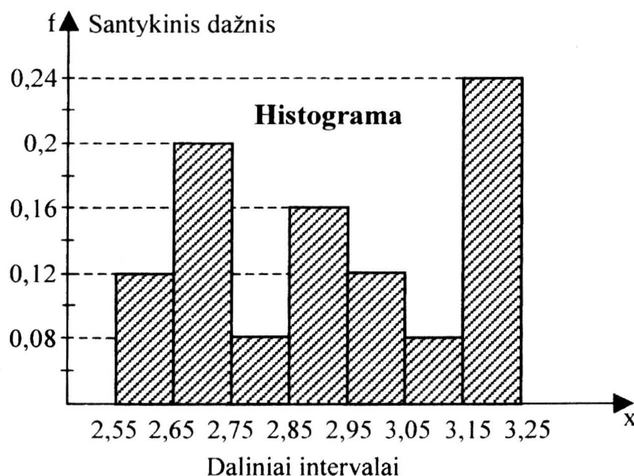
Aišku, kad 3 + 5 + 2 + 4 + 3 + 2 + 6 = 25, t.y. imties dalinių intervalų dažnių n_i, i = 1, 2, …, 7 suma lygi imties elementų skaičiui.

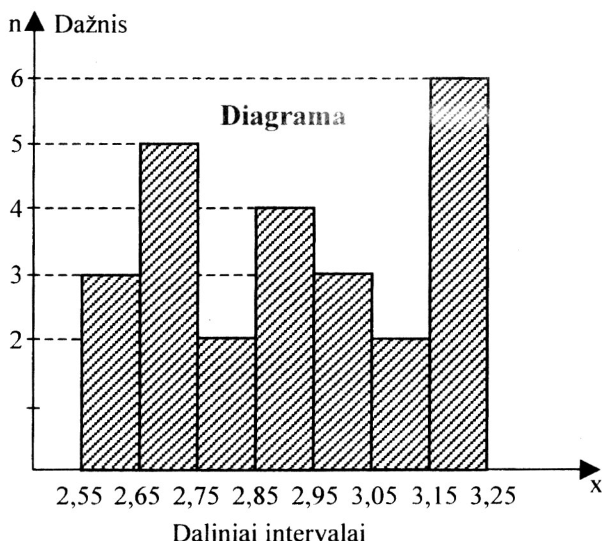
Imties dalinių intervalų santykinių dažnių f_i, i = 1, 2, …, 7 suma lygi 1: 0,12 + 0,2 + 0,08 + 0,16 + 0,12 + 0,08 + 0,24 = 1.

Skaičiavimo rezultatus surašome į dažnių lentelę:

Dalinio intervalo numeris i	Dalinis intervalas $[t_i; t_{i+1}]$	Dalinio intervalo dažnis n_i	Dalinio intervalo santykinis dažnis f_i
1	[2,55; 2,65)	3	0,12
2	[2,65; 2,75)	5	0,2
3	[2,75; 2,85)	2	0,08
4	[2,85; 2,95)	4	0,16
5	[2,95; 3,05)	3	0,12
6	[3,05; 3,15)	2	0,08
7	[3,15; 3,25)	6	0,24
	Dažnių suma:	25	1

Iš dažnių lentelės duomenų nubrėžiame imties grafinį vaizdą – **histogramą** bei **diagramą**.





2 pavyzdys. Matuojant jaunų medelių aukštį (decimetrais), gauti tokie duomenys:

2,8	3,1	3,3	2,6	9,8
2,2	2,3	3,9	4,9	4,1
5,8	2,5	6,2	7,1	8,2
9,1	7,3	5,6	5,9	7,5

Sugrupuosime šią imtį, užrašysime ją dažnių lentele. Nubraižysime histogramą ir diagramą – imties grafinį vaizdą.

Sprendimas. Mažiausioji imties reikšmė – 2,2, didžiausioji – 9,8. Imties intervalas [2,2; 9,8]. Šiuo atveju patogiausia dalinių intervalų ilgį imti lygų vienetui. Tačiau intervalas [2,2; 9,8] "blogai" dalijasi į dalinius intervalus, kurių ilgis lygus vienetui, todėl imsime intervalą [2; 10]. Suskaičiuojame, kiek imties reikšmių pateko į kiekvieną dalinį intervalą [2; 3), [3; 4), [4; 5), [5; 6), [6; 7), [7; 8), [8; 9), [9; 10), t.y. surandame

dalinių intervalų dažnius n_i, $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$. Remdamiesi formule $f_i = \frac{n_i}{N}$; kur $N = 20$ – imties reikšmių skaičius, randame dalinių intervalų santykinius dažnius f_i $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$.

Skaičiavimai:

Į pirmąjį dalinį intervalą [2; 3) patenka penkios reikšmės 2,2; 2,3; 2,5; 2,6; 2,8, t.y. šio intervalo dažnis $n_1 = 5$. Santykinis dažnis $f_1 = \frac{n_1}{20} = \frac{5}{20} = 0{,}25$.

Į antrąjį dalinį intervalą [3; 4) patenka trys reikšmės 3,1; 3,3; 3,9, t.y. šio intervalo dažnis $n_2 = 3$. Santykinis dažnis $f_2 = \frac{n_2}{20} = \frac{3}{20} = 0{,}15$.

Į trečiąjį dalinį intervalą [4; 5) patenka dvi reikšmės 4,1; 4,9, t.y. šio intervalo dažnis $n_3 = 2$. Santykinis dažnis $f_3 = \frac{n_3}{20} = \frac{2}{20} = 0{,}1$.

Į ketvirtąjį dalinį intervalą [5; 6) patenka trys reikšmės 5,6; 5,8; 5,9, t.y. šio intervalo dažnis $n_4 = 3$. Santykinis dažnis $f_4 = \frac{n_4}{20} = \frac{3}{20} = 0{,}15$.

Į penktąjį dalinį intervalą [6; 7) patenka viena reikšmė 6,2, t.y. šio intervalo dažnis $n_5 = 1$. Santykinis dažnis $f_5 = \frac{n_5}{20} = \frac{1}{20} = 0{,}05$.

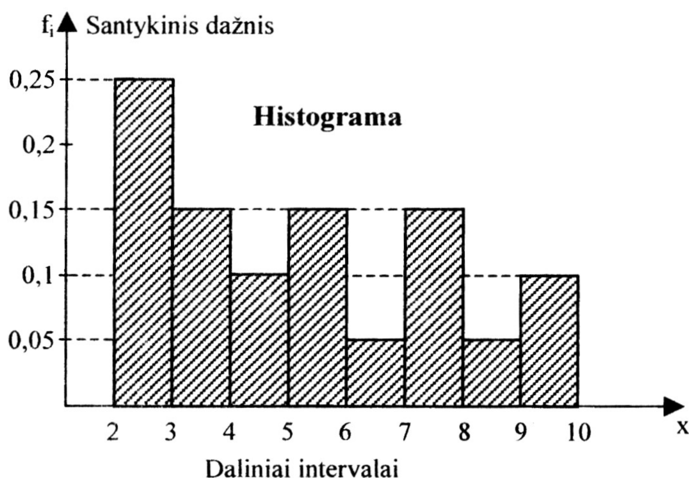
Į šeštąjį dalinį intervalą [7; 8) patenka trys reikšmės 7,1; 7,3; 7,5, t.y. šio intervalo dažnis $n_6 = 3$. Santykinis dažnis $f_6 = \frac{n_6}{20} = \frac{3}{20} = 0{,}15$.

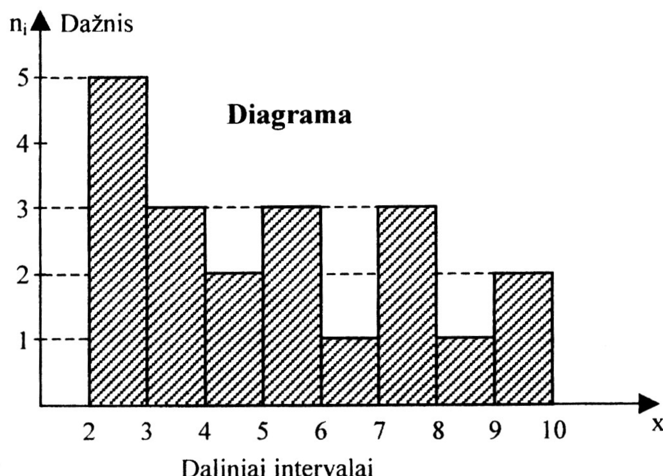
Į septintąjį dalinį intervalą [8; 9) patenka viena reikšmė 8,2, t.y. šio intervalo dažnis $n_7 = 1$. Santykinis dažnis $f_7 = \frac{n_7}{20} = \frac{1}{20} = 0{,}05$.

Sudarome klasifikuotos imties dažnių lentelę:

Dalinio intervalo numeris i	Dalinis intervalas $[t_i; t_{i+1}]$	Dalinio intervalo dažnis n_i	Dalinio intervalo santykinis dažnis f_i
1	[2; 3)	5	0,25
2	[3; 4)	3	0,15
3	[4; 5)	2	0,1
4	[5; 6)	3	0,15
5	[6; 7)	1	0,05
6	[7; 8)	3	0,15
7	[8; 9)	1	0,05
8	[9; 10)	2	0,1
	Dažnių suma:	20	1

Nubraižysime imties grafinį vaizdą – **histogramą** ir **diagramą**. Kad nubraižytume histogramą, Oy ašyje atidėsime santykinius dalinių intervalų dažnius f_i, o Ox ašyje atidėsime dalinius intervalus; po to brėžiame stačiakampius stulpelius, kurių aukštis lygus intervalų santykiniam dažniui f_i. Taip pat brėžiame ir diagramą, tik Oy ašyje atidedame intervalų dažnius n_i.





Uždaviniai savarankiškam darbui

1. Matuojant 40 aštuoniolikmečių merginų ūgį, gauti tokie rezultatai (centimetrais):

168	157	174	170	164	175	167	172	161	169
171	176	166	172	180	156	175	183	168	164
170	164	173	152	174	168	160	178	171	166
169	162	176	172	163	175	166	170	158	168

1) Dalinio intervalo ilgį pasirinkę lygų 5, sugrupuokite imtį, sudarykite dažnių lentelę. Raskite dalinių intervalų dažnių bei santykinių dažnių sumas.

2) Nubraižykite diagramą.

3) Dalinių intervalų santykinius dažnius išreiškę procentais, nubraižykite histogramą.

(Imties intervalu laikykite intervalą [150; 185].)

2. Žymaus dailininko parodos ekspozicija veikė 30 dienų. Žurnale buvo žymima apsilankiusių žmonių skaičius. Gauti tokie rezultatai: 60; 43; 80; 35; 42; 65; 68; 74; 84; 46; 40; 38; 26; 62; 53; 53; 71; 56; 79; 36; 43; 35; 30; 42; 50; 42; 28; 62; 26; 30.

1. Dalinio intervalo ilgį pasirinkę lygų 10, sugrupuokite imtį.

2. Sudarykite dažnių lentelę.

3. Nubraižykite histogramą.

3. Nuo mokomajame bandymų sklype augančios obels mokiniai nuskynė 50 obuolių ir juos pasvėrė. Nustatytas toks svoris gramais: 65, 64, 68, 55, 77, 99, 40, 46, 52, 80, 74, 70, 23, 30, 58, 46, 80, 69, 60, 25, 33, 50, 60, 74, 87, 67, 62, 22, 39, 60, 74, 80, 55, 92, 95, 38, 78, 69, 49, 30, 92, 97, 50, 43, 64, 40, 80, 66, 90, 50.

1. Imties intervalu laikydami intervalą [20; 100] ir dalinio intervalo ilgį pasirinkę lygų 10, sugrupuokite imtį.

2. Apskaičiuokite dalinių intervalų dažnius, santykinius dažnius ir dalinio intervalo vidurio reikšmes.

3. Sudarykite klasifikuotos imties dažnių lentelę.

4. Nubraižykite diagramą.

4. Mokykloje dirba 45 įvairaus amžiaus mokytojai. Atlikus apklausą, gauti tokie duomenys pagal amžių (metais): 32; 36; 42; 48; 47; 30; 28; 36; 38; 37; 52; 44; 32; 46; 42; 40; 57; 50; 52; 37; 42; 44; 51; 49; 31; 29; 42; 34; 35; 42; 37; 34; 45; 47; 42; 56; 45; 28; 36; 43; 34; 30; 44; 40; 37.

1. Dalinio intervalo ilgį pasirinkę lygų 5, sugrupuokite imtį.

2. Sudarykite dažnių lentelę.

3. Nubraižykite diagramą.

5. Šešių partijų A, B, C, D, E, F, dalyvavusių rinkimuose, surinkti balsai "už" pasiskirstė taip: partija A surinko 25 % balsų, B – 12,5 %, C – 16,5 %, D – 12,5 %, E – 16,5 %, F – 17 % balsų. Sudarykite santykinių dažnių lentelę, nubraižykite skritulinę diagramą ir histogramą.

6. Šeimos biudžeto pajamos 1998 metais buvo paskirstytos taip: maistui – 40 %, mokesčiams už butą – 20 %, aprangai – 12,5 %, buities reikmėms – 7,5 %, poilsiui – 15 %, santaupos – 5 % pajamų. Sudarykite santykinių dažnių lentelę, nubraižykite skritulinę diagramą ir histogramą.

7. Nustatinėjant dvidešimties auksinių žiedų masę, gauti tokie duomenys (gramais): 2,93; 2,85; 3,42; 3,12; 2,88; 3,31; 3,26; 3,42; 2,95; 3,23; 2,88; 3,25; 2,89; 3,42; 3,04; 2,98; 3,24; 3,42; 3,02; 3,21. Dalinio intervalo ilgį pasirinkę lygų 0,1, sugrupuokite imtį, sudarykite dažnių lentelę. Nubraižykite histogramą. (Imties intervalu laikykite intervalą

8. Norima įkurti privačią mokyklą, kurioje mokslas būtų mokamas. Tačiau neaišku, kokią ji turės paklausą ir kiek tėvai pajėgūs mokėti už savo sūnaus ar dukros mokslą. Todėl buvo apklaustos 64 šeimos, turinčios vaikų iki 16 metų amžiaus, kokią pinigų sumą jie galėtų skirti per mėnesį, jei vaikas eitų į šią mokyklą. Gauti tokie rezultatai (Lt):

80 10 20 40 60 50 80 90 80 50 20 70 80 10 50 40
90 10 30 50 70 50 60 90 50 40 100 50 30 80 40 30
100 110 60 60 30 70 90 80 80 40 90 70 90 60 10 20
140 40 50 70 30 50 40 80 40 10 10 60 50 50 100 30.

1. Sutvarkykite imtį.

2. Raskite imties plotį, tūrį.

3. Apskaičiuokite vidurkį, dispersiją ir vidutinį kvadratinį nuokrypį.

4. Dalinio intervalo ilgį pasirinkę lygų 20, sugrupuokite imtį ir sudarykite dažnių lentelę.

5. Nubraižykite histogramą.

9. Įmonėje dirbančiųjų tarnautojų stažas yra 40, 35, 10, 12, 15, 16, 24, 32, 16, 17, 39, 24, 26, 8, 6, 15, 18, 24, 19, 8, 9, 5, 14, 26, 12, 13, 17, 20, 11, 13.

1. Dalinio intervalo ilgį pasirinkę lygų 5, sugrupuokite imtį ir sudarykite dažnių lentelę.

2. Nubraižykite imties histogramą.

3. Apskaičiuokite imties vidurkį.

10. Parduotuvė per vieną mėnesį pardavė keturiasdešimt moteriškų suknelių, kurių dydžiai tokie:

44 46 48 50 52 46 48 48 52 46
50 48 50 48 48 48 50 54 46 48
52 46 46 44 46 50 46 44 48 48
46 48 44 46 48 44 48 44 48 50.

1. Dalinio intervalo ilgį pasirinkę lygų 2, sugrupuokite imtį ir sudarykite dažnių lentelę.

2. Nubraižykite histogramą dalinių intervalų santykinius dažnius išreiškę procentais.

11. Mokinių sergamumui ištirti buvo pasirinktos dvi klasės, kuriose yra 60 mokinių. Praleistų dienų skaičius pateiktas lentelėje (vieno trimestro laikotarpiu):

Praleistų dienų skaičius	[0;10)	[10; 20)	[20; 30)	[30; 40)	[40; 50)	[50; 60)	[60; 70)	[70; 80)
Mokinų skaičius	25	16	10	4	2	2	1	0

1. Apskaičiuokite dalinių intervalų vidurio reikšmes ir santykinius dažnius.

2. Nubraižykite histogramą.

12. Šeima per trejus metus išnaudojo elektros kiekį (kWh):

93 80 84 82 70 76 90 75 70 85 90 85
95 80 70 70 75 75 80 80 85 98 105 108
96 80 82 85 80 85 90 85 80 106 100 103.

1. Dalinio intervalo ilgį pasirinkę lygų 5, sugrupuokite imtį ir sudarykite dažnių lentelę.

2. Nubraižykite diagramą.

3. Apskaičiuokite imties vidurkį.

13. Šeima per keturis metus šildymo sezonu už karštą vandenį ir šilumą mokėjo tokius mokesčius (litais):

107,41;	126,72;	136,4;	118,42;	108,6;	112,32;
138,32;	162,94;	168,07;	117,7;	105,31;	120,53;
108,39;	188,92;	185,27;	148,8;	151,75;	152,32;
124,52;	192,16;	194,2;	163,4;	172,42;	184,02.

1. Dalinio intervalo ilgį pasirinkę lygų 10, sugrupuokite imtį ir sudarykite dažnių lentelę.

2. Apskaičiuokite imties vidurkį.

3. Nubraižykite histogramą.

14. Kūno kultūros mokytojas užfiksavo tokius 30 vaikinų prisitraukimų prie skersinio skaičius: 3, 5, 0, 8, 4, 1, 7, 11, 6, 8, 9, 4, 0, 1, 5, 6, 10, 4, 6, 7, 1, 5, 8, 10, 6, 3, 6, 8, 4, 5.

1. Dalinio intervalo ilgį pasirinkę lygų 2, sutvarkykite imtį.

2. Lentelėje surašykite imties elementų dažnius ir santykinius dažnius bei jų sumas.

3. Nubraižykite diagramą.

5. Įvykio santykinis dažnis ir tikimybė

Tarkime, kad atliekame n bandymų. Kiekvieno bandymo metu įvykis A įvyko arba neįvyko. Jei n bandymų serijoje įvykis A įvyko k kartų, tai įvykio A **statistiniu dažniu** vadiname santykį $\frac{k}{n}$ ir žymime $P_k\{A\}$:

$$P_k\{A\} = \frac{k}{n};$$

čia k – skaičius tų bandymų, kuriuose A įvyko.

Įvykio A statistinis dažnis $P_k\{A\}$ priklauso nuo bandymų skaičiaus. Esant pakankamai dideliam bandymų skaičiui, laukiamo įvykio statistinis dažnis kiek norima mažai skiriasi nuo to įvykio tikimybės atskiro bandymo atveju, t.y. pakankamai didelėms k reikšmėms:

$$P(A) \approx P_k\{A\}.$$

Šis faktas išreiškia J. Bernulio atskleisto didžiųjų skaičių dėsnio esmę.

IV skyrius
TIKRINAMŲJŲ DARBŲ PAVYZDŽIAI

1. Kombinatorika

Besimokantiems matematiką pagal bendrojo kurso programą

1 variantas

1. Duoti skaitmenys 1, 2, 3, 4, 5. Kiek iš jų galima sudaryti:
   1) dviženklių lyginių skaičių, kurių skaitmenys gali kartotis;
   2) dviženklių nelyginių skaičių, neturinčių vienodų skaitmenų?
   Nubraižykite galimybių medžius.
2. Yra 6 skirtingų dydžių krepšiai. Keliais būdais gali pasirinkti krepšius du grybautojai?
3. Ant sienos vienoje eilėje kabinami 5 paveikslai. Keliais būdais juos galima išdėstyti?
4. Muzikos kioske yra 6 ansamblių kasetės. Kiek galimybių turi Marius, jeigu jis nori nusipirkti 8 kasetes?
5. Apskaičiuokite: 1) $C_7^3 + C_5^2$; 2) $\frac{1}{6!} \cdot A_5^2$.

2 variantas

1. Duoti skaitmenys: 6, 7, 8, 9. Kiek iš jų galima sudaryti:
   1) triženklių skaitmenų neturinčių vienodų skaitmenų;
   2) dviženklių skaičių, kurie dalijasi iš 2, o skaitmenys skaičiuje gali kartotis?
   Nubraižykite galimybių medžius.
2. Ekskursijų biuras siūlo 12 kelionių į įvairias pasaulio šalis. Kiek galimybių turi žmogus, nutaręs aplankyti dvi šalis?
3. Keliais būdais galima susodinti 4 žmones prie šešiaviečio stalo?
4. Įmonėje dirba 11 pardavėjų ir 6 krovikai. 3 pardavėjas ir 2 krovikus norima perkelti į kitą įmonę. Keliais būdais tai galima padaryti?
5. Apskaičiuokite: 1) $C_4^3 + C_8^4$; 2) $3! \cdot A_6^3$.

3 variantas

1. Duoti skaitmenys: 4, 5, 7, 8, 9. Kiek iš jų galima sudaryti:
   1) triženklių lyginių skaičių, kurių skaitmenys gali kartotis;
   2) dviženklių skaičių, kurie dalintųsi iš 5 ir neturėtų vienodų skaitmenų?
   Nubraižykite galimybių medžius.

2. Dėžėje yra 6 bananai, 4 apelsinai ir 7 mandarinai. Keliais būdais galima išsirinkti 2 bananus, 1 apelsiną ir 4 mandarinus?

3. Pramoginių šokių konkurse dalyvauja 10 porų. Kiek galimybių joms užimti paskutiniąsias tris vietas?

4. Į parduotuvę atvežė 10 televizorių. Keliais būdais juos galima sustatyti į vieną eilę?

5. Apskaičiuokite: 1) $A_4^2 + 3 \cdot C_5^3$; 2) $\frac{1}{4!} \cdot P_3$.

4 variantas

1. Duoti skaitmenys: 1, 3, 8, 9. Kiek iš jų galima sudaryti:
   1) dviženklių nelyginių skaičių, kurių skaitmenys gali kartotis;
   2) triženklių skaičių, kurių paskutinis skaitmuo lygus 3, ir visi skaitmenys skaičiuje yra skirtingi?
   Nubraižykite galimybių medžius.

2. Mama turi 6 karštųjų patiekalų receptus. Pietums ji nori paruošti du patiekalus pagal turimus receptus. Kiek mama turi pasirinkimo galimybių?

3. Asta eina į ligoninę lankyti draugės ir nori jai nunešti dviejų rūšių saldainių ir trijų rūšių vaisių. Parduotuvėje yra 6 rūšys saldainių ir 5 rūšys vaisių. Kiek pasirinkimo galimybių turi Asta?

4. Turime žodį „SAULĖ“. Kiek naujų junginių galima sudaryti , naudojant duotąsias žodžio raides?

5. Apskaičiuokite: 1) $\frac{1}{4!} \cdot P_3 + C_3^2$; 2) $A_7^4 + C_7^2$.

Besimokantiems matematiką pagal išplėstinio kurso programą

1 variantas

1. Duoti skaitmenys: 0, 2, 3, 6, 7. Kiek iš jų galima sudaryti:
1) triženklių skaičių, kurių skaitmenys gali kartotis;
2) lyginių triženklių skaičių, neturinčių vienodų skaitmenų.

2. Parduotuvėje yra 6 raudonos, 5 žalios ir 4 mėlynos spalvos rankšluosčiai. Keliais būdais galima išsirinkti: 1) visų spalvų po vieną rankšluostį;
2) 2 raudonos ir 3 žalios spalvos rankšluosčius?

3. Lentynoje sudėtos 5 knygos.
1) Keliais būdais galima išdėstyti šias knygas lentynoje?
2) Kiek yra galimybių pasiimti 3 bet kokias knygas?

4. Restorano švediškas stalas siūlo pasirinkti 4 rūšių mišrainių. Kiek galimybių turi žmogus, nutaręs: 1) įsidėti 6 šaukštus įvairių mišrainių;
2) paragauti tik 3 rūšių mišrainių.

5. Mokyklos teniso turnyre, žaidžiant po du moksleivius, suloštos 66 partijos. 1) Kiek buvo dalyvių?
2) Kiek yra galimybių užimti tris paskutiniąsias vietas, jei vieną vietą negali užimti du dalyviai?

6. Raskite skleidinio $\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^6$ koeficientą prie nario, neturinčio x.

2 variantas

1. Duoti skaitmenys : 1, 2, 3, 4, 5, 9. Kiek iš jų galima sudaryti:
1) keturženklių skaičių, neturinčių vienodų skaitmenų;
2) triženklių lyginių skaičių, kurių skaitmenys gali kartotis.

2. Parduotuvėje yra 3 skirtingos vokiečių gamybos, 4 skirtingos anglų gamybos, 5 skirtingos italų gamybos suknelės. Kiek mergaitė turi pasirinkimo galimybių, jei ji pirks:
1) dvi skirtingų gamintojų sukneles; 2) vieną suknelę?

3. Rikiuotėje yra 5 mergaitės ir 3 berniukai. Keliais būdais:
1) juos galima sustatyti į eilę; 2) pasirinkti 3 mergaites ir 2 berniukus?

4. Dėžėje yra 4 skirtingi rašikliai, 5 skirtingi pieštukai ir 3 skirtingi trintukai. Keliais būdais mokinys gali pasirinkti:
1) 2 rašiklius ir 3 pieštukus; 2) visų daiktų po vieną?

5. Žirgų lenktynėse užimti pirmąsias 2 vietas yra 132 galimybės.
1) Kiek žirgų dalyvavo lenktynėse?
2) Kiek galimybių prieš startą surikiuoti šiuos žirgus į eilę?

6. Raskite skleidinio $\left(2x^{\frac{1}{3}}-\frac{1}{x^2}\right)^5$ koeficientą prie nario, neturinčio x.

3 variantas

1. Duoti skaitmenys: 2, 3, 5, 0, 7, 9. Kiek iš jų galima sudaryti:
   1) keturženklių nelyginių skaičių, kurių skaitmenys gali kartotis;
   2) triženklių skaičių, kurie dalijasi iš 5, ir nė vienas skaitmuo skaičiuje nesikartoja?
2. Įmonės savininkas renkasi įmonei pavadinimą iš 10 siūlomų žodžių. Kiek galimybių pasirinkti turi savininkas, jei pavadinimą gali sudaryti ne daugiau kaip du žodžiai?
3. Vieną eilę sudaro 6 mergaitės, o kitą 4 berniukai.
   1) Kiek galimybių yra juos išrikiuoti eilėje (atskirai berniukų ir mergaičių)?
   2) Keliais būdais galima išsirinkti komandą iš 4 mergaičių ir 2 berniukų?
4. Bazėje yra 8 skirtingų rūšių limonado. Kiek yra galimybių nusipirkti:
   1) 10 įvairių rūšių limonado; 2) 6 skirtingų rūšių limonado?
5. Klasės draugai apsikeitė 210 dovanėlių. Kiekvienas įteikė dovanėlę kiekvienam savo klasės draugui. Kiek moksleivių keitėsi dovanomis?
6. Raskite skleidinio $\left(x^{\frac{3}{5}} - \frac{1}{2}x^{2}\right)^{4}$ koeficientą prie nario x^0.

4 variantas

1. Duoti skaitmenys 5, 6, 7, 8, 9. Kiek iš jų galima sudaryti:
   1) keturženklių skaičių, kurių skaitmenys gali kartotis;
   2) triženklių skaičių, kurie baigiasi skaitmeniu 8, ir skaitmenys skaičiuje negali kartotis?
2. Viešbutyje yra 6 kambariai. Keliais būdais galima juose apgyvendinti:
   1) 4 žmones; 2) 12 žmonių?
3. 1) Olimpinės loterijos „Perlas“ žaidime „Jėga“ reikia išsirinkti 5 skaičius iš 34 skaičių ir vieną raidę iš raidžių A, B, C, D. Kiek yra būdų tai padaryti?
   2) Žmogus renkasi 3 žaidimo „Milijonierius“ bilietus iš 12 bilietų, padėtų ant stalo. Kiek yra pasirinkimo galimybių?
4. Krepšyje yra galimybių išsirinkti 4 rūšių futbolo, 5 rūšių krepšinio ir 2 rūšių regbio kamuolių. Kiek galimybių išsirinkti:
   1) vieną kamuolį; 2) 2 futbolo, 6 krepšinio ir 4 regbio kamuolius?
5. Pasirinkti 2 darbininkus iš brigados yra 190 galimybių. Kiek žmonių yra brigadoje?
6. Raskite skleidinio $\left(\sqrt{x^3} - \frac{1}{x}\right)^5$ koeficientą prie nario, neturinčio x.

2. Tikimybių teorijos pradmenys

Besimokantiems matematiką pagal bendrojo kurso programą

1 variantas

1. Vienodos kortelės sunumeruotos nuo 1 iki 10. Kokia tikimybė, kad atsitiktinai paėmus dvi korteles, ant jų užrašytų skaičių suma bus lygi 7?

2. Iš dėžės, kurioje yra 6 geltoni ir 5 žali rutuliai, atsitiktinai traukiami 2 rutuliai. Kokia tikimybė, kad abu ištraukti rutuliai geltoni ?

3. Dėžėje yra 8 raudonos ir 4 mėlynos spalvos kaladėlės. Kokia tikimybė, kad atsitiktinai paimta kaladėlė bus ne raudonos spalvos?

4. Pintinėje yra 6 obuoliai ir 4 kriaušės. Atsitiktinai paimami 3 vaisiai. Atsitiktinis dydis X – paimtų obuolių skaičius.
   1) Sudarykite atsitiktinio dydžio X skirstinį.
   2) Apskaičiuokite atsitiktinio dydžio X vidurkį EX.
   3) Nubraižykite atsitiktinio dydžio X skirstinio grafiką.

2 variantas

1. Dėžutėje yra 16 kortelių, sunumeruotų skaičiais nuo 1 iki 16. Atsitiktinai traukiama viena kortelė. Kokia tikimybė, kad ant šios kortelės esantis skaičius dalus iš 3?

2. Dėžėje yra 5 raudonos ir 4 mėlynos spalvos rutuliai. Kokia tikimybė, kad ištraukus 2 rutulius, abu jie bus raudonos spalvos?

3. Automobilių parke iš 100 automobilių 28 yra mėlynos ir 34 raudonos spalvos. Kokia tikimybė, kad iš parko išvažiuos ne mėlynos ir ne raudonos spalvos automobilis?

4. Klasėje yra 6 berniukai ir 4 mergaitės. Atsitiktinai pasirenkami 3 mokiniai. Atsitiktinis dydis X – pasirinktų mergaičių skaičius.
   1) Sudarykite atsitiktinio dydžio X skirstinį.
   2) Apskaičiuokite atsitiktinio dydžio X vidurkį EX.
   3) Nubraižykite atsitiktinio dydžio X skirstinio grafiką.

3 variantas

1. Grupėje yra 4 vaikinai ir 6 merginos. Atsitiktinai pasirenkami du žmonės. Kokia tikimybė, kad abu jie bus vaikinai?

2. Dėžėje yra 15 detalių, iš jų 6 nestandartinės. Kokia tikimybė ištraukti standartinę detalę?

3. Kortelės sunumeruotos nuo 1 iki 27. Kokia tikimybė, kad ištraukus vieną kortelę, jos numeris bus 4 arba 5 kartotinis?

4. Klasėje mokosi 10 berniukų ir 12 mergaičių. Atsitiktinai parenkami 3 mokiniai. Atsitiktinis dydis X – parinktų berniukų skaičius.
   1) Sudarykite atsitiktinio dydžio X skirstinį.
   2) Apskaičiuokite atsitiktinio dydžio X vidurkį EX.
   3) Nubraižykite atsitiktinio dydžio X skirstinio grafiką.

4 variantas

1. Dėžėje yra 5 baltos ir 4 mėlynos spalvos rutuliai. Kokia tikimybė,kad ištraukus 2 rutulius, abu jie bus skirtingos spalvos?

2. Bilietai sunumeruoti nuo 1 iki 37 imtinai. Kokia tikimybė ištraukti bilietą, kurio numeris yra pirminis skaičius?

3. Pintinėje yra 6 obuoliai ir 3 kriaušės. Kokia tikimybė, kad atsitiktinai išimtas vaisius bus arba obuolys, arba kriaušė?

4. Bendrovėje dirba 24 tarnautojai, iš jų 8 vyrai. Atsitiktinai parenkami 2 žmonės. Atsitiktinis dydis X – parinktų moterų skaičius.
   1) Sudarykite atsitiktinio dydžio X skirstinį.
   2) Apskaičiuokite atsitiktinio dydžio X vidurkį EX.
   3) Nubraižykite atsitiktinio dydžio X skirstinio grafiką.

Besimokantiems matematiką pagal išplėstinio kurso programą

1 variantas

1. Dėžėje yra 5 raudonos ir 4 žalios spalvos rutuliai. Kokia tikimybė, traukiant 3 rutulius, ištraukti ne daugiau kaip 2 žalios spalvos rutulius?
2. Metami du lošimo kauliukai. Kokia tikimybė, kad atvirtusių akučių suma lygi 5 arba 7?
3. Tikimybė,kad Martynas išlaikys matematikos egzaminą lygi 0,8 , kad neišlaikys lietuvių – 0,1. Kokia tikimybė,kad Martynas išlaikys bent vieną egzaminą?
4. Iš 36 kortų kaladės atsitiktinai viena po kitos ištraukiamos dvi kortos. Kokia tikimybė,kad pirmoji korta – tūzas, o antroji – karalius?
5. Kabinete yra 7 vyrai ir 4 moterys. Atsitiktinai parenkami du žmonės. Atsitiktinis dydis X – pasirinktų moterų skaičius.
   1) Sudarykite atsitiktinio dydžio X skirstinį.
   2) Apskaičiuokite atsitiktinio dydžio X vidurkį EX ir dispersiją DX.

2 variantas

1. Dėžėje yra 10 juodos ir 4 baltos spalvos rutuliai. Kokia tikimybė,kad nežiūrint traukiant 3 rutulius, tarp jų bus ne daugiau kaip 2 juodos spalvos rutuliai?
2. Kokia tikimybė, kad atsitiktinai surinkto telefono numerio paskutinis skaitmuo yra skaičiaus 2 arba skaičiaus 5 kartotinis?
3. Metamos trys monetos. Kokia tikimybė, kad bent vienoje monetoje iškris herbas?
4. Iš 40 bilietų mokinys nemoka 16 bilietų. Kokia tikimybė jam išlaikyti egzaminą, jei traukdamas bilietą pirmą kartą ištraukė tą, kurio nemoka? Mokinys bilietus traukė du kartus.
5. Dėžėje yra 10 bilietų, iš kurių 4 yra laimingi. Atsitiktinai ištraukiami 3 bilietai.
   Atsitiktinis dydis X – nelaimingų bilietų skaičius.
   1) Sudarykite atsitiktinio dydžio X skirstinį.
   2) Apskaičiuokite atsitiktinio dydžio X vidurkį EX ir dispersiją DX.

3 variantas

1. Komandoje yra 12 sportininkų, iš kurių 4 – sporto meistrai. Kokia tikimybė, kad atsitiktinai parinkus 4 žmones, tarp jų bus ne daugiau kaip 3 sporto meistrai?
2. Kokia tikimybė, kad atsitiktinai pasirinktas natūralusis dviženklis skaičius yra skaičių 6 arba 15 kartotinis?
3. Pirmojo šaulio pataikymo į taikinį tikimybė 0,6 , o antrojo – 0,8. Kokia tikimybė, kad bent vienas šaulys nepataikys į taikinį?
4. Iš 30 bilietų mokinys moka 14 bilietų. Kokia tikimybė jam išlaikyti egzaminą, jei traukdamas bilietą pirmą kartą ištraukė tą, kurio nemoka, o antrą kartą – tą, kurį moka?
5. Dėžėje yra 5 brokuotos ir 15 kokybiškų detalių. Atsitiktinai išimamos 3 detalės. Atsitiktinis dydis X – nekokybiškų detalių skaičius.

1) Sudarykite atsitiktinio dydžio X skirstinį.

2) Apskaičiuokite atsitiktinio dydžio X vidurkį EX ir dispersiją DX.

4 variantas

1. Įstaigoje dirba 6 moterys ir 7 vyrai. Kokia tikimybė, kad atsitiktinai parinkus 4 žmones, tarp jų bus ne daugiau kaip 3 moterys?
2. Rašomieji darbai užšifruoti skaičiai nuo 1 iki 85 imtinai. Kokia tikimybė, kad atsitiktinai parinkto darbo numeris yra skaičių 10 arba 12 kartotinis?
3. Tikimybė, kad reikalinga knyga yra mokyklos bibliotekoje, lygi 0,6 , o miesto bibliotekoje – 0,8. Kokia tikimybė, kad knyga yra bent vienoje bibliotekoje?
4. Iš 36 kortų kaladės atsitiktinai viena po kitos ištraukiamos dvi kortos. Kokia tikimybė, kad pirmoji korta – būgnai, o antroji – karalius?
5. Dėžėje yra 8 juodos ir 5 mėlynos spalvos rašikliai. Atsitiktinai ištraukiami 3 rašikliai. Atsitiktinis dydis X – išimtų juodos spalvos rašiklių skaičius.

1) Sudarykite atsitiktinio dydžio X skirstinį.

2) Apskaičiuokite atsitiktinio dydžio X vidurkį EX ir dispersiją DX.

3. Matematinės statistikos pradmenys

Besimokantiems matematiką pagal bendrojo kurso programą

1 variantas

1. Matematikos kontrolinio darbo rezultatai pateikti lentelėje:

Pažymiai	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Skaičius	2	2	3	6	7	4	3	2	3

1) Kiek mokinių rašė kontrolinį darbą ?
2) Apskaičiuokite imties:
   a) plotį; b) centrą; c) vidurkį (0,01 tikslumu).

2. Šokių kolektyvui reikėjo pasiūti šventinę aprangą. Šokėjai pateikė drabužių dydžius:

40	50	42	42	46	48	40	50	48	48
46	44	48	42	44	46	44	48	46	44
46	48	44	46	48	50	46	46	48	46
48	46	44	42	48	50	48	48		

1) Kiek šokėjų yra kolektyve ?
2) Sudarykite dažnių lentelę.
3) Nubraižykite diagramą.

3. Klasės mokiniai atliko tyrimą: visą savaitę kiekvienas mokinys užrašydavo, kiek šeima per dieną išleidžia pinigų. Po septynių dienų klasės mokiniai atnešė duomenis, rodančius, kiek per vieną savaitę šeima išleido pinigų (litais):

296	266	257	288	271	321	270
291	258	289	320	283	269	300
302	292	317	264	267	314	319
324	306	277	323			

1) Imties intervalu laikydami intervalą [255; 325], o dalinio intervalo ilgį pasirinkę lygų 10, sudarykite dažnių lentelę.
2) Nubraižykite diagramą.

2 variantas

1. Tyrimus atliekanti grupė domėjosi, kiek vienuoliktokai per metus perskaito grožinės literatūros knygų mokyklos bibliotekoje. Gauti rezultatai užrašyti lentelėje:

Mokinių skaičius	8	10	12	16	18	20	22
Knygų kiekis	0	6	10	12	8	9	7

1) Kiek mokykloje vienuoliktokų ?
2) Apskaičiuokite imties:
   b) plotį; b) centrą; c) vidurkį.

2. Šeima tris metus kiekvieną mėnesį užsirašydavo sunaudoto šalto vandens kiekį (m^3). Gauti tokie duomenys:

2	3	4	2	2	4	6	6	5	6
2	5	4	4	6	5	7	4	6	6
2	4	6	2	4	4	3	3	4	2
6	5	5	4	6	2				

1) Kiek šalto vandens (m^3) šeima sunaudojo per tris metus ?
2) Sudarykite dažnių lentelę.
3) Nubraižykite diagramą.

3. Kiekvieną dieną Kristina sugrįžusi iš parduotuvės, užsirašydavo, kiek vidutiniškai pinigų (litais) ji išleido. Ji gavo tokius rezultatus:

12	42	32	48	13	15	23	18	14	70	10
40	10	30	11	33	14	34	25	13	42	27
21	31	45	22	80	24	16	19	26	26	27
30	74	46	25	18	33	17	28	35	11	68
52	60	19	32	21	55	22	34	56	12	56
62	82	18	53	98	85	78	60	80	85	60

2) Imties intervalu laikydami intervalą [10; 100], o dalinio intervalo ilgį pasirinkę lygų 10, sudarykite dažnių lentelę.
3) Nubraižykite diagramą.

3 variantas

1. Moksleiviai dalyvavo akcijoje „Papildyk mokyklos bibliotekos knygų fondą". Lentelėje pateikti duomenys rodo, kiek knygų atnešė mokiniai:

Mokinių skaičius	4	5	10	14	16	18
Knygų kiekis	3	6	2	1	5	4

1) Kiek buvo atnešta knygų ?
2) Apskaičiuokite imties:
   c) plotį; b) centrą; c) vidurkį.

2. Rūta sukūlė taupyklę, kurioje buvo monetos (centais):

2	10	5	20	50	20	2	1	10	50
10	20	2	50	20	10	10	5	20	10
20	5	10	10	20	50	2	10	10	20
20	10	5	5	50	10	10	20	20	10

1) Kiek pinigų susitaupė Rūta ?
2) Sudarykite dažnių lentelę.
3) Nubraižykite diagramą.

3. Šuolio į tolį varžybose užfiksuoti tokie rezultatai (metrais):

1,73	2,1	1,52	2,98	2,5	2,54	2,93	1,75
2,12	1,84	2,04	1,94	2,78	2,62	2,4	2,6
2,9	1,74	1,92	2,05	2,8	1,9	2,1	2,48
1,84	2,43	2,3	2,4	2,53	1,79	1,8	2,7

2) Imties intervalu laikydami intervalą [1,5; 3], o dalinio intervalo ilgį pasirinkę lygų 0,2 , sudarykite dažnių lentelę.
3) Nubraižykite diagramą.

4 variantas

1. Mokyklos kiemelyje buvo sodinami našlaičių daigai. Lentelėje parodyta, kiek mokinių ir po kiek našlaičių daigų pasodino kiekvienas mokinys:

Mokinių skaičius	10	12	14	15	18	20
Daigų kiekis	3	8	12	10	14	9

1) Kiek našlaičių daigų buvo pasodinta ?
2) Apskaičiuokite imties:
   d) plotį; b) centrą; c) vidurkį.

2. Besiruošdamas koncertui, merginų šokių kolektyvas intensyviai repetavo po keletą valandų per dieną. Šokių kolektyvas repetavo valandų:

1	2	1	2	3	2	2	4	5	4
2	2	4	3	3	2	1	4	5	1
1	2	2	3	2	2	4	2	1	2

1) Kiek iš viso valandų repetavo šokių kolektyvas prieš koncertą?
2) Sudarykite dažnių lentelę.
3) Nubraižykite diagramą.

3. Parduotuvės savininkas susidomėjo, kiek per valandą į parduotuvę įeina pirkėjų. Jis du mėnesius registravo įeinančius. Gauti tokie rezultatai:

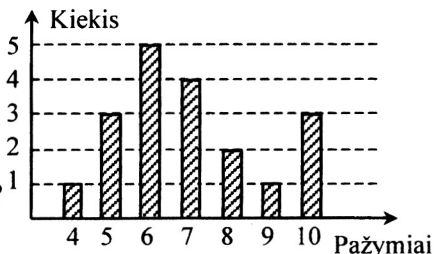
10	14	23	13	48	12	34	35	10	42
12	24	10	22	15	11	14	49	18	34
14	25	12	24	16	10	15	16	21	30
24	40	42	45	17	21	33	20	17	20
26	14	43	28	30	32	28	35	36	18
38	18	14	44	36	27	40	41	37	19

1) Imties intervalu laikydami intervalą [10; 50], o dalinio intervalo ilgį pasirinkę lygų 5, sudarykite dažnių lentelę.
2) Nubraižykite diagramą.

Besimokantiems matematiką pagal išplėstinio kurso programą

1 variantas

1. Ryčio gauti lapkričio mėnesį pažymiai ir jų kiekis pavaizduoti diagrama.



1) Kiek pažymių gavo Rytis lapkričio mėnesį ?
2) Sudarykite dažnių lentelę.
3) Apskaičiuokite imties:
   a) plotį; b) centrą; c) vidurkį (0,01 tikslumu).

2. Į parduotuvę buvo atvežta batų, kurių kainos (litais) yra:

240	170	190	170	220	170	160	190	170	190
240	170	190	240	170	240	190	190	170	200
170	190	200	220	190	160	200	240	160	190
200	200	200	220	190	200	240	240	160	240

1) Raskite imties tūrį.
2) Sudarykite dažnių lentelę.
3) Apskaičiuokite imties vidurkį.
4) Nubraižykite diagramą.

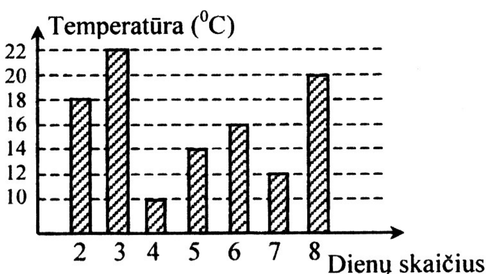
3. Linas nuskynė obuolius ir juos pasvėrė. Gauti tokie rezultatai (gramais):

64	95	87	58	77	50	30	60	25	80
43	92	74	30	55	90	49	39	60	52
50	55	60	23	68	66	69	22	69	46
97	80	50	70	64	80	78	62	80	40
92	74	33	74	65	40	38	67	46	99

1) Imties intervalu laikydami intervalą [20; 100], o dalinio intervalo ilgį pasirinkę lygų 10, sudarykite dažnių lentelę.
2) Apskaičiuokite santykinius dažnius.
3) Nubraižykite diagramą.

2 variantas

1. Monika daugiau kaip mėnesį stebėjo, kaip kito oro temperatūra. Gauti rezultatai pavaizduoti diagrama.



1) Kiek dienų Monika stebėjo oro temperatūros kitimą ?
2) Sudarykite dažnių lentelę.
3) Apskaičiuokite imties:
   a) plotį; b) centrą; c) vidurkį.

2. Šaudydamas iš lanko į taikinį, sportininkas pasiekė tokius rezultatus:

5	4	6	7	8	7	5	6	5
7	4	7	10	4	7	8	4	9

1) Raskite imties tūrį.
2) Sudarykite dažnių lentelę.
3) Apskaičiuokite imties vidurkį.
4) Nubraižykite diagramą.

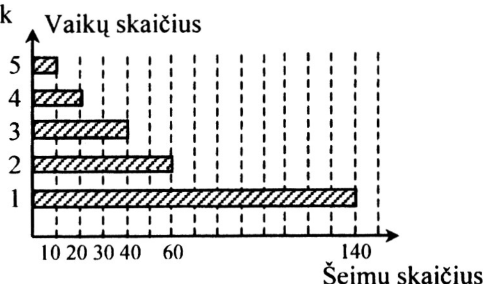
3. Įstaigos langams buvo pasiūtos užuolaidos. Sunaudotos medžiagos kiekis kiekvienam kabineto langui (metrais) yra:

2,8	2,6	3,0	1,6	2,5	1,7	2,8	2,2	2,5
2,7	2,8	2,6	3,0	1,6	1,6	2,9	2,2	2,7
2,6	2,7	1,9	2,7	1,7	2,4	2,2	2,5	2,9
2,7	2,7	1,7	2,6	2,8	2,4	2,4	2,5	3,0
2,8	2,6	1,6	2,7	2,7	2,3	2,5	1,7	1,6

1) Imties intervalu laikydami intervalą [1,6; 3], o dalinio intervalo ilgį pasirinkę lygų 0,2 , sudarykite dažnių lentelę.
2) Apskaičiuokite santykinius dažnius.
3) Nubraižykite diagramą.

3 variantas

1. Diagrama rodo, kiek vaikų yra tirtose šeimose.



1) Kelios šeimos buvo ištirtos?
2) Sudarykite dažnių lentelę.
3) Apskaičiuokite imties:
   a) plotį; b) centrą; c) vidurkį.

2. Lauros gauti pažymiai iš matematikos per visus mokslo metus yra tokie:

7	6	7	7	8	8	5	10	8
9	7	8	7	5	6	10	8	7
8	7	6	7	7	8	10	6	8

Raskite imties tūrį.
1) Sudarykite dažnių lentelę.
2) Apskaičiuokite imties vidurkį ir dispersiją ?
3) Nubraižykite diagramą.

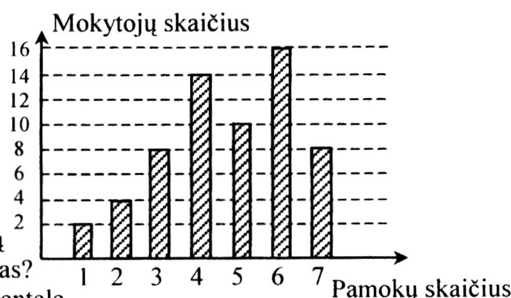
3. Arnas užsirašė savo draugų svorį. Gauti tokie rezultatai (kilogramais):

48	64	47	59	47	64	50	68
55	63	67	72	60	74	65	54
57	57	58	78	61	75	67	50
50	72	59	46	73	48	78	69
62	78	71	51	52	53	53	76

1) Imties intervalu laikydami intervalą [45; 80], o dalinio intervalo ilgį pasirinkę lygų 5, sudarykite dažnių lentelę.
2) Apskaičiuokite santykinius dažnius.
3) Nubraižykite diagramą.

4 variantas

1. Domėtasi, kiek mokytojai per dieną turi pamokų. Diagramoje pavaizduoti vienos dienos pamokų kiekis ir mokytojų skaičius.



1) Keli mokytojai tirtą dieną turėjo pamokas?
2) Sudarykite dažnių lentelę.
3) Apskaičiuokite imties: a) plotį; b) centrą; c) vidurkį.

2. Dvyliktosios klasės mokiniai sprendė matematikos uždavinius. Kontrolinį darbą sudarė 20 uždavinių. Kiekvienas mokinys išsprendė skirtingą kiekį uždavinių:

12	8	4	8	7	5	16	14	14	2	6
10	14	16	10	16	10	10	16	4	4	12
8	7	2	10	5	16	10	8	4	14	12
10	16	4	6	4	2	16	12	10	10	7
10	10	8	8	14	14	6	4	12	7	7

1) Raskite imties tūrį.
2) Sudarykite dažnių lentelę.
3) Apskaičiuokite imties vidurkį ir dispersiją.
4) Nubraižykite diagramą.

3. Parduotuvėje kiekvieną dieną buvo parduotas skirtingas apelsinų kiekis (kilogramais):

12	42	25	18	14	27	14	24	11	35
24	21	12	24	18	31	19	32	25	11
28	24	10	12	26	19	15	15	34	21
38	29	21	15	28	20	29	12	43	44
40	30	31	22	32	28	32	11	45	15
23	42	48	28	18	26	33	10	18	20

1) Imties intervalu laikydami intervalą [10; 50], o dalinio intervalo ilgį pasirinkę lygų 5, sudarykite dažnių lentelę.
2) Apskaičiuokite santykinius dažnius.
3) Nubraižykite diagramą.

4. Kombinatorikos, tikimybių teorijos ir matematinės statistikos pradmenys

Besimokantiems matematiką pagal bendrojo kurso programą

1 variantas

1. Duoti skaitmenys 4, 6, 7, 8, 1.

   1) Kiek galima iš šių skaitmenų sudaryti dviženklių skaičių su skirtingais skaitmenimis?

   2) Kiek tarp jų yra nelyginių skaičių?

2. Dėžėje yra 2 raudoni ir 4 juodi rutuliai.

   1) Keliais būdais galima išimti 1 raudoną ir 3 juodus rutulius?

   2) Kokia tikimybė, kad atsitiktinai išimtas rutulys bus raudonos spalvos?

   3) Atsitiktinai išimami 2 rutuliai. Atsitiktinis dydis X – išimtų raudonų rutulių skaičius.

      a) Sudarykite atsitiktinio dydžio X skirstinį.
      b) Apskaičiuokite atsitiktinio dydžio X vidurkį EX.
      c) Nubraižykite atsitiktinio dydžio X skirstinio grafiką.

3. Kūno kultūros mokytojas užfiksavo tokius mergaičių šuolio į tolį rezultatus (cm): 150; 142; 146; 120; 200; 164; 180; 140; 123; 128; 152; 164; 130; 120; 116; 145; 150; 160; 120; 160; 152; 170; 124; 130; 147.

   1) Imties intervalu laikydami intervalą nuo [110; 200], o dalinio intervalo ilgį pasirinkę lygų 10, imtį suskirstykite daliniais intervalais .

   2) Sudarykite dažnių lentelę.

   3) Apskaičiuokite imties vidurkį.

   4) Nubraižykite diagramą.

2 variantas

1. Duoti skaitmenys 4, 0, 5, 6, 7.

   1) Kiek iš šių skaitmenų galima sudaryti triženklių nelyginių skaičių, jeigu skaitmenys skaičiuje gali kartotis?

   2) Kiek tarp jų yra skaičių, kurie dalijasi iš 5?

2. Dėžėje yra 8 raudonos ir 6 mėlynos spalvos kaladėlės.

   1) Keliais būdais galima išsirinkti 2 raudonos ir 4 mėlynos spalvos kaladėles?

   2) Kokia tikimybė, kad atsitiktinai paimta kaladėlė bus ne raudonos spalvos?

   3) Atsitiktinai paimamos 2 kaladėlės. Atsitiktinis dydis X – paimtų mėlynos spalvos kaladėlių skaičius.

      a) Sudarykite atsitiktinio dydžio X skirstinį.
      b) Apskaičiuokite atsitiktinio dydžio X vidurkį.
      c) Nubraižykite atsitiktinio dydžio X skirstinio grafiką.

3. Atlikta apklausa. Domėtasi, kiek mokiniai skiria laiko pamokų ruošimui. Gauti tokie duomenys (min): 60; 70; 90; 40; 70; 150; 160; 80; 80; 90; 120; 90; 30; 60; 40; 50; 50; 90; 80; 200; 240; 170; 160; 150; 200; 180; 200; 30; 90; 100.

   1) Imties intervalu laikydami intervalą nuo [30; 200], o dalinio intervalo ilgį pasirinkę lygų 20, imtį suskirstykite daliniais intervalais.

   2) Sudarykite dažnių lentelę.

   3) Apskaičiuokite imties vidurkį.

   4) Nubraižykite diagramą.

3 variantas

1. Duoti skaitmenys 1, 3, 5, 6, 8.

1) Kiek iš šių skaitmenų galima sudaryti dviženklių lyginių su skirtingais skaitmenimis skaičių ?

2) Kiek tarp jų yra skaičių kurie dalijasi iš 2 ?

2. Klasėje mokosi 10 berniukų ir 12 mergaičių.

1) Keliais būdais galima sudaryti delegaciją, į kurią įeitų 6 mergaitės ir 4 berniukai ?
2) Kokia tikimybė, kad atsitiktinai pasirinktas mokinys bus berniukas ?
3) Atsitiktinai parenkami 3 mokiniai. Atsitiktinis dydis X – parinktų berniukų skaičius.
   a) Sudarykite atsitiktinio dydžio X skirstinį.
   b) Apskaičiuokite atsitiktinio dydžio X vidurkį.
   c) Nubraižykite atsitiktinio dydžio X skirstinio grafiką.

3. Tiriama, kiek per 30 dienų iš bibliotekos buvo paimta knygų. Gauti tokie duomenys: 60; 83; 75; 81; 104; 45; 85; 71; 68; 75; 98; 100; 79; 48; 75; 98; 78; 56; 85; 62; 60; 83; 71; 56; 78; 102; 50; 64; 85; 83.

1) Imties intervalu laikydami intervalą nuo [45; 105], o dalinio intervalo ilgį pasirinkę lygų 10, imtį suskirstykite daliniais intervalais.
2) Sudarykite dažnių lentelę.
3) Apskaičiuokite imties vidurkį.
4) Nubraižykite diagramą.

4 variantas

1. Duoti skaitmenys 2, 4, 3, 8, 0.

1) Kiek iš šių skaitmenų galima sudaryti triženklių skaičių su skirtingais skaitmenimis ?

2) Kiek tarp jų yra skaičių, kurie dalijasi iš 2 ?

2. Bendrovėje dirba 24 tarnautojai, iš jų 8 vyrai.

1) Keliais būdais galima sudaryti delegaciją, į kurią įeitų 7 vyrai ir 13 moterų ?

2) Kokia tikimybė, kad atsitiktinai pasirinktas tarnautojas bus moteris ?

3) Atsitiktinai parenkami 2 žmonės. Atsitiktinis dydis X – parinktų moterų skaičius.

a) Sudarykite atsitiktinio dydžio X skirstinį.
b) Apskaičiuokite atsitiktinio dydžio X vidurkį.
c) Nubraižykite atsitiktinio dydžio X skirstinio grafiką.

3. Suskaičiuota, kiek klasės mokiniai per mėnesį praleido pamokų. Gauti tokie duomenys: 6; 12; 18; 24; 42; 2; 30; 17; 11; 5; 8; 48; 56; 83; 65; 47; 34; 7; 2; 54; 37; 16; 35; 26; 29.

1) Imties intervalu laikydami intervalą nuo [0; 90], o dalinio intervalo ilgį pasirinkę lygų 10, imtį suskirstykite daliniais intervalais.

2) Sudarykite dažnių lentelę.

3) Apskaičiuokite imties vidurkį.

4) Nubraižykite diagramą.

Besimokantiems matematiką pagal išplėstinio kurso programą

1 variantas

1. Dėžėje yra 7 raudoni ir 4 geltoni rutuliukai.

1) Keliais būdais galima paimti 4 rutuliukus, kad tarp jų būtų ne mažiau kaip trys raudoni rutuliukai ?
2) Atsitiktinai vienas po kito išimami 3 rutuliukai. Kokia tikimybė, kad visi rutuliukai bus geltoni ?
3) Atsitiktinai išimami du rutuliukai. Atsitiktinis dydis X – išimtų raudonų rutuliukų skaičius.
   a) Sudarykite atsitiktinio dydžio X skirstinį.
   b) Apskaičiuokite atsitiktinio dydžio X matematinę viltį.
   c) Raskite atsitiktinio dydžio X dispersiją.

2. Pirmosios raketos pataikymo į taikinį tikimybė yra 0,3 , antrosios – 0,5. Kokia tikimybė, kad bent viena raketa pataikys į taikinį ?

3. Nustatinėjant merginų svorius, gauti tokie rezultatai (kg):

54	63	45	60	64	58	54	58	50	54	46	53	60
50	74	68	70	49	52	56	48	58	53	60	59	

1) Raskite imties plotį, tūrį ir centrą.
2) Apskaičiuokite imties vidurkį.
3) Imties intervalu laikydami intervalą nuo [45; 70], o dalinio intervalo ilgį pasirinkę lygų 5, sugrupuokite imtį ir sudarykite dažnių lentelę.
4) Nubraižykite diagramą.

2 variantas

1. Dėžėje yra 10 bilietų, iš kurių 4 yra laimingi.

1) Keliais būdais galima paimti 3 bilietus, kad tarp jų būtų ne daugiau kaip 2 laimingi bilietai?
2) Atsitiktinai ištraukiame 2 bilietai. Kokia tikimybė, kad jie bus abu laimingi ?
3) Atsitiktinai ištraukiami 3 bilietai. Atsitiktinis dydis X – nelaimingų bilietų skaičius.
   a) Sudarykite atsitiktinio dydžio X skirstinį.
   b) Apskaičiuokite atsitiktinio dydžio X matematinę viltį.
   c) Raskite atsitiktinio dydžio X dispersiją.

2. Metami du lošimo kauliukai. Kokia tikimybė, kad atvirtusių akučių suma lygi 3 arba 6 ?

3. Buvo renkami pinigai labdarai. Atplėšus vokus, buvo rastos tokios pinigų sumos (Lt):

15	10	20	12	17	15	10	5	25	46	10	5	12	14	25	53
20	5	10	14	20	40	45	50	10	5	10	15	30	36	40	47

1) Raskite imties plotį, tūrį ir centrą.
2) Apskaičiuokite imties vidurkį.
3) Imties intervalu laikydami intervalą nuo [5; 55], o dalinio intervalo ilgį pasirinkę lygų 10, sugrupuokite imtį ir sudarykite dažnių lentelę.
4) Nubraižykite diagramą.

3 variantas

1. Dėžėje yra 5 brokuotos ir 15 kokybiškų detalių.

1) Keliais būdais galima paimti 4 detales, kad tarp jų būtų ne mažiau kaip 3 kokybiškos detalės ?
2) Atsitiktinai išimamos 2 detalės. Kokia tikimybė, kad viena iš jų bus kokybiška ?
3) Atsitiktinai išimamos 3 detalės. Atsitiktinis dydis X – nekokybiškų detalių skaičius.
   a) Sudarykite atsitiktinio dydžio X skirstinį.
   b) Apskaičiuokite atsitiktinio dydžio X matematinę viltį.
   c) Raskite atsitiktinio dydžio X dispersiją.

2. Iš 20 fizikos bilietų Lina išmoko 10 ir iš 15 biologijos egzamino bilietų neišmoko 4. Kokia tikimybė, kad Lina išlaikys bent vieną egzaminą ?

3. Įmonėje dirbančių tarnautojų stažas (metais) yra:

30	10	5	3	1	4	12	16	17	25	24	20	18	10	10
12	8	4	3	14	17	20	1	14	12	11	21	11	12	7

1) Raskite imties plotį, tūrį ir centrą.
2) Apskaičiuokite imties vidurkį.
3) Imties intervalu laikydami intervalą nuo [0; 30], o dalinio intervalo ilgį pasirinkę lygų 5, sugrupuokite imtį ir sudarykite dažnių lentelę.
4) Nubraižykite diagramą.

4 variantas

1. Dėžėje yra 8 juodi ir 5 mėlyni rašikliai.

1) Keliais būdais galima paimti 3 rašiklius, kad tarp jų būtų ne daugiau kaip 2 juodi rašikliai ?
2) Atsitiktinai ištraukiami 2 rašikliai. Kokia tikimybė, kad abu rašikliai bus mėlyni ?
3) Atsitiktinai ištraukiami 3 rašikliai. Atsitiktinis dydis X – išimtų juodų rašiklių skaičius.
   a) Sudarykite atsitiktinio dydžio X skirstinį.
   b) Apskaičiuokite atsitiktinio dydžio X vidurkį.
   c) Raskite atsitiktinio dydžio X dispersiją.

2. Tikimybė, kad Aistė išlaikys matematikos egzaminą, lygi 0,8 , kad neišlaikys informatikos egzamino – 0,4. Kokia tikimybė, kad Aistė išlaikys bent vieną egzaminą ?

3. Mokiniai sprendė matematikos uždavinius. Moksleivių surinktų taškų skaičius už išspręstus uždavinius:

32	47	30	20	24	54	34	42	40	16	22	28	30	34	35
41	24	37	26	51	40	42	36	16	15	26	42	45	24	32

1) Raskite imties plotį, tūrį ir centrą.
2) Apskaičiuokite imties vidurkį.
3) Imties intervalu laikydami intervalą nuo [15; 55], o dalinio intervalo ilgį pasirinkę lygų 5, sugrupuokite imtį ir sudarykite dažnių lentelę.
4) Nubraižykite diagramą.

ATSAKYMAI

I skyrius

KOMBINATORIKA

1. Bendrieji kombinatorikos dėsniai

1. 1) 19; 2) 12; 3) 12.
2. 1) 24; 2) 1080.
3. 1) 10; 2) 24.
4. 1) 12; 2) 60; 3) 20.
5 1) 28; 2) 48; 3) 14.
6. 15.
7. 1) 22; 2) 600.
8. 1) 9; 2) 12.
9. 9.
10. 672.
11. 1) 22; 2) 10.
12. 23.
13. 72.
14. 1) 504; 2) 72; 3) 24.
15. 20.
16. 1) 15; 2) 120.
17. 120.
18. 6.
19. 12.
20. 24.
21. 120.
22. 30.
23. 60.
24. 210.
25. 1) 4; 2) 8.
26. 1) 15; 2) 56.
27. 18.
28. 378.
29. 10.
30. 20; 96.
31. 199.
32. 738.
33. 24; 75.
34. 9000.
35. 1) 12; 2) 16.
36. 1) 360; 2) 72.
37. 1) 540; 2) 50.
38. 1) 25; 2) 221; 3) 246; 4) 815; 5) 1061.
39. 1) 25; 2) 20.
40. 1) 31; 2) 22; 3) 210;4) 28; 5) 143.
41. 21.
42. 1) 16; 2) 3; 3) 10.

2. Junginiai

2.1. Gretiniai, gretiniai su pasikartojimais

1. 720.
2. 13800; 303600.
3. 840.
4. 343.
5. 56.
6. 3024.
7. 210.
8. 125; 60.
9. 1) 9; 2) 6.
10. 155.
11. 205.
12. 1) 155; 2) 85.
13. 720; 480.
14. 840.
15. 1) 30240; 2) 180000.
16. 360.
17. 136080.
18. 1860480.
19. 332640.
20. 1344.

2.2. Kėliniai, kėliniai su pasikartojimais

1. 24.

2. 6.

3 120.

4. 5040.

5. 720.

6. 24.

7. 8!.

8. 12!.

9. 1260.

10. 6.

11. 120.

12. 720.

13. 59875200.

14. 210.

15. 25200.

16. 720.

17. 1) 1440; 2) 3600.

18. 240.

19. 360; 240.

20. $P_3 \cdot P_{28}$.

2.3. Deriniai, deriniai su pasikartojimais

1. 10.

2. 4.

3. 3003.

4. 1) 11; 2) 55; 3) 66; 4) 126; 5) 8.

5. 84.

6. 19448.

7. 600.

8. 1) 120; 2) 210.

9. 1) 28; 2) 30.

10. 120120.

11. 56.

12. 4457400.

13. 672.

14. 210.

15. 13463424.

16. 1) 6; 2) 4; 3) 60.

17. 1) 8; 2) 28; 3) 56; 4) 36; 5) 92; 6) 70.

18. 1) 45; 2) 360.

19. 1) 25; 2) 2520; 3) 600; 4) 74.

20. 240.

2.4. Įvairūs uždaviniai

1. 12154833.

2. 12; 8.

3. 12.

4. 1) 2016; 2) 512; 3) 992.

5. 502.

7. 1) 455; 2) 120.

8. 1) 120; 2) 21; 3) 60.

9. 298.

10. 1) 20; 2) 55; 3) 100; 4) 126000.

11. 20.

12. 8400; 5040.

13. 7054320.

14. 56.

15. 182.

16. 6720; 720.

17. 72.

18. 37.

19. 16.

20. 720.

21. 2002.

22. 5040.

23. 14; 40.

24. 16; 4096.

25. 6720; 840.

26. 1) 12; 2) 13; 3) 16.

27. 99768240.

28. 12.

29. 1) 26; 2) 5040; 3) 247.

30. 1)30; 2) 90; 3) 300; 4) 16; 5) 180.

31. 150.

32. 210.

33. 12.

34. 15.

35. 685.

36. 240.

37. 1627920.

38. $C_6^3 \cdot C_5^3$.

39. 210.

40. 480.

41. 60.

42. 29070.

43. 15.

44. 196. **45.** 40320. **46.** 878080. **47.** 43200. **48.** 6435. **49.** 2000. **50.** 518184.

2.5. Lygtys ir nelygybės

1. 1) 4; 2) 5; 3) 5; 4) 11; 5) 5; 6) 4; 7) 7; 8) 8; 9) 5; 10) 4; 11) 10; 12) 8; 13) 6; 14) 9; 15) 7; 16) 3; 17) n = 6, m = 3; 18) 7; 19) 3; 20) 13; 21) 7; 22) 12; 23) 10; 24) 10.

2. 1) (18; 1); 2) (17;2); 3) (12; 5).

3. 1) 5. 2) 11. 3) 14. 4) 10. 5) 6. 6) 10.

4. 1) 1, 2, ..., 5; 2) 11, 12, ..., 18; 3) 6, 7,.8, 9; 4) 15, 16, ...; 5) 2, 3, ...; 6) 1, 2, ..., 5; 7) 12, 13, ...; 8) 2, 3, ..., 9; 9) 8, 9, ...; 10) 2, 3, 4; 11) 8, 9, 10; 12) 1, 2, ..., 9.

5. 3.

6. $-\frac{63}{4}$; $-\frac{23}{8}$.

7. 7:

8. 1) 648; 2) 35; 3) 0,6; 4) 256; 5) 715; 6) $\frac{30}{7}$.

2.6. Niutono binomas

1. 1) $x^7 + 7x^6 + 21x^5 + 35x^4 + 35x^3 + 21x^2 + 7x + 1$;

2) $x^5 - 10x^4 + 40x^3 - 80x^2 + 80x - 32$;

3) $81x^4 + 216x^3y + 216x^2y^2 + 96xy^3 + 16y^4$;

4) $x^{12} - 6x^9 + 15x^6 - 20x^3 - 15 - \frac{6}{x^3} + \frac{1}{x^6}$.

2. 1) $89 - 28\sqrt{10}$; 2) $112 + 64\sqrt{3}$; 3) $176\sqrt{6} - 304\sqrt{2}$; 4) $320\sqrt{10} - 704\sqrt{2}$.

3. 1) 70; 2) 24310; 3) 5005; 4) 120.

4. 66.

5. $-\frac{5120}{9}$.

6. 4.

7. $-1280000x^3y^3$.

8. $35x^2$.

9. 6.

10. 32.

11. 210.

12. 16; 380.

13. $\frac{1}{2}n(n-1)(n-2)$ ir 0.

14. $-1-\sqrt{5}$; $\sqrt{5}-1$.

15. 10; $\frac{1}{x^2\sqrt{x}}$.

16. $\frac{5}{27}$.

17. $165z^{14}$.

18. 10^{-4}; 10.

19. $\frac{56x^{5,5}}{b^2}$.

20. 84.

21. 210.

22. 11.

23. 252.

24. $14a^{\frac{7}{2}}$.

25. 9.

26. -1 ir 2.

27. $-\frac{1}{3}$.

28. $n=6$; $x=\pm\frac{1}{2}$.

29. 26.

30. 9.

II skyrius

TIKIMYBIŲ TEORIJOS PRADMENYS

1. Įvykiai

1. Įvykis A turi 4 elementariuosius įvykius, B – 11, C – 3, D – 8, E – 5.

2. Įvykis A turi 28 elementariuosius įvykius, B – 9, C – 7, D – 3, E – 7, F – 4.

3. B, D, E, G.

4. A; C; E.

5. A; B; D.

6. Atsitiktiniai įvykiai– B; E; būtinieji – A; F; negalimi – C; D.

7. 1) ne; 2) taip; 3) ne.

9. 1) ir 3).

2. Veiksmai su įvykiais

1. 1) $A \subset C \subset B \subset D$;
2) $A \subset C \subset B$;
3) $B \subset A \subset C \subset D$;
4) $B \subset C \subset A$;
5) 5) $A \subset C \subset B$.

2. $B = C$.

3. 1) E – "į taikinį pataikyta iš dviejų šūvių";

2) E – "loterijoje išlošta arba 10, arba 20, arba 25 litai";

3) E – "metus dvi monetas, iškrito bent vienas herbas";

4) E – "metus kauliuką, iškrito ne mažiau kaip 4 akys".

4. 1) E – "pataikyta pirmaisiais dviem šūviais";

2) E – "iškrito viena akis";

3) E – "laimingas bilietas ištrauktas pirmaisiais dviem bandymais".

5. 1) "iškrito arba 2, arba 6 akys";

2) "iškrito arba 2, arba 4 akys";

3) "iškrito arba 1, arba 2, arba 3, arba 5 akys".

6. 1) "detalė yra arba pirmos, arba antros rūšies";

2) "detalė – pirmos rūšies";

3) AC – negalimas įvykis; 4) AB – negalimas įvykis, todėl $AB + C = C$, t.y. C – "detalė trečios rūšies".

7. 1) B; 2) A; 3) B; 4) C; 5) D.

3. Klasikinis įvykio tikimybės apibrėžimas

4. Priešingo įvykio tikimybė

1. $P(A) = \frac{1}{6}$; $P(B) = \frac{1}{2}$;

$P(C) = \frac{1}{3}$.

2. $\frac{60}{143}$.

3. 1) $\frac{3}{8}$; 2) $\frac{1}{2}$; 3) $\frac{3}{8}$.

4. $\frac{3}{11}$.

5. $P(A) = \frac{3}{28}$; $P(B) = \frac{9}{14}$;

$P(C) = \frac{1}{4}$; $P(D) = \frac{3}{28}$.

6. $P(A) = \frac{1}{2}$; $P(B) = \frac{5}{8}$;

$P(C) = \frac{3}{8}$; $P(D) = \frac{3}{8}$.

7. $\frac{1}{720}$.

8. 1) 0,2; 2) 0,3; 3) 0,4;
4) 0,55; 5) 0,05.

9. 1) $\frac{59}{365}$; 2) $\frac{71}{365}$; 3) $\frac{48}{365}$;
4) $\frac{12}{365}$; 5) $\frac{11}{365}$.

10. $\frac{5^5}{9\cdot 10^4}$.

11. $P(A)=\frac{2}{5}$; $P(B)=\frac{1}{5}$;
$P(C)=\frac{9}{25}$; $P(D)=\frac{3}{25}$;
$P(E)=\frac{1}{5}$.

12. 1) $\frac{3}{11}$; 2) $\frac{2}{11}$; 3) $\frac{6}{11}$.

13. 1. $P(A)=\frac{11}{28}$; $P(B)=\frac{15}{56}$;
$P(C)=\frac{1}{7}$; $P(D)=\frac{23}{56}$;
2. $P(\overline{A})=\frac{17}{28}$; $P(\overline{B})=\frac{41}{56}$;
$P(\overline{C})=\frac{6}{7}$; $P(\overline{D})=\frac{33}{56}$.

14. $\frac{1}{7^5}$.

15. $\frac{2}{35}$.

16. $\frac{1}{2}$.

17. $P(A)=\frac{13}{24}$; $P(B)=\frac{5}{12}$;
$P(C)=\frac{13}{24}$.

18. $\frac{2}{7}$.

19. 1) $\frac{1}{18}$; 2) $\frac{1}{6}$; 3) $\frac{2}{9}$.

20. $P(A)=\frac{1}{2}$; $P(B)=\frac{1}{8}$;
$P(C)=\frac{7}{8}$; $P(D)=\frac{3}{8}$;
$P(E)=0$.

21. $P(A)=\frac{41}{142}$; $P(B)=\frac{16}{71}$;
$P(C)=\frac{6}{71}$.

22. 1) $\frac{5}{12}$; 2) $\frac{1}{12}$; 3) $\frac{1}{18}$;
4) $\frac{1}{9}$; 5) $\frac{2}{9}$; 6) $\frac{5}{36}$.

23. 1) $\frac{3}{8}$; 2) $\frac{5}{8}$.

24. $\frac{1}{15}$.

25. 0,14.

26. 0,2.

27. 8.

28. $P(A)=\frac{12}{703}$; $P(B)=\frac{8}{259}$.

29. $\frac{153}{770}$.

30. 0,33.

5. Nesutaikomų įvykių sumos tikimybė

6. Sutaikomų įvykių sumos tikimybė

1. $\frac{1}{3}$.

2. $\frac{3}{14}$.

3. 1) $\frac{5}{9}$; 2) $\frac{4}{9}$.

4. 0,09.

5. 1) $\frac{5}{16}$; 2) $\frac{3}{8}$.

6. $\frac{11}{14}$.

7. $\frac{31}{42}$.

8. $P(A)=\frac{14}{33}$;

$P(B)=\frac{5}{33}$;

$P(C)=\frac{14}{33}$.

9. $P(A)=0,1$;

$P(B)=0,9$;

$P(C)=0,88$;

$P(D)=0,5$.

10. 0,2.

11. $P(A)=\frac{8}{455}$;

$P(B)=\frac{106}{455}$.

12. $\frac{11}{36}$.

13. $\frac{5}{9}$.

14. 0,76.

15. $\frac{17}{30}$.

16. 0,97.

7. Nepriklausomų įvykių sandaugos tikimybė

8. Sąlyginė tikimybė.

9. Dviejų priklausomų įvykių sandaugos tikimybė

1. 0,0441.

2. $\frac{1}{12}$.

3. 0,12.

4. 0,56.

5. 0,14.

6. 0,975.

7. $\frac{5}{36}$.

8. $\frac{63}{64}$.

9. $P(A)=\frac{9}{50}$; $P(B)=\frac{243}{1000}$;

$P(C)=\frac{7}{250}$.

10. $\frac{64}{115}$.

11. 0,56.

12. 0,4.

13. $\frac{5}{18}$.

14. 1) 0,648; 2) 0,954.

15. 0,323.

16. 1) $\frac{1}{7^5}$; 2) $\frac{6^5}{7^5}$;

3) $1-\left(\frac{6}{7}\right)^5$.

17. 1) $\frac{4}{15}$; 2) $\frac{3}{5}$; 3) $\frac{1}{2}$; 4) $\frac{1}{36}$.

18. $\frac{1}{5}$.

19. $\frac{3}{7}$.

10. Pilnosios tikimybės formulė

1. $\frac{43}{60}$.

2. 0,74.

3. 0,905.

4. 0,666.

5. 0,6.

6. $\frac{4}{13}$.

11. Atsitiktiniai dydžiai

1. 1) taip; 2) ne.

2. 1) $EX = 4{,}7$; $DX = 1{,}21$;

2) $EX = 1$; $DX = 1$;

3) $EX = 8$; $DX = 8$;

4) $EX = 0{,}1$; $DX = 1{,}29$.

3. 1) 0,15; 2) $\frac{11}{36}$.

5. $\frac{2}{9}$.

6. $EX = 0$; $DX = 200$.

7. $EX = 0{,}8$.

8. $EX = -1$; $DX = \frac{113}{8}$;

$P(A) = \frac{5}{8}$; $P(B) = \frac{9}{16}$.

9. $EX = 4{,}99$.

10. $EX = 2{,}734$;

$DX = 1{,}57$.

11. 1)

X	0	1	2	3	4
P	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$

2) EX = 2; 3) DX = 1;

12. 1)

X	0	1	2	5	10	50	100
P	0,817	0,1	0,05	0,02	0,01	0,002	0,001

2) EX = 0,6; DX = 16,44.

13. 2)

X	0	1	2	3
P	$\frac{24}{91}$	$\frac{24}{91}$	$\frac{20}{91}$	$\frac{2}{91}$

3) EX = 1; 4) $DX = \frac{52}{91}$,

$\sigma = \sqrt{\frac{52}{91}}$.

14. 2)

X	8	9	10
P	$\frac{25}{64}$	$\frac{15}{32}$	$\frac{9}{64}$

3) 8,75.

15. 2)

X	4	5	6	7	8
P	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{13}{36}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{36}$

3) $EX = 5\frac{2}{3}$; $DX = -\frac{17}{18}$.

16. 2)

X	0	1	2	3	4
P	$\frac{1}{126}$	$\frac{20}{126}$	$\frac{60}{126}$	$\frac{40}{126}$	$\frac{5}{126}$

3) $EX \approx 2{,}22$, $DX \approx 0{,}62$.

17. 2)

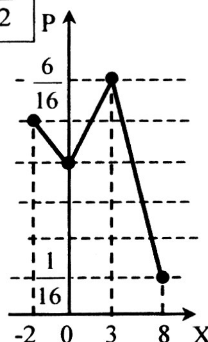
X	1	2	3	4	5
P	$\frac{6}{252}$	$\frac{60}{252}$	$\frac{120}{252}$	$\frac{60}{252}$	$\frac{6}{252}$

3) $EX = 3$, $DX \approx 0{,}67$.

18. 1)

X	-2	0	3	8
P	$\frac{5}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{1}{16}$

2)



3) $EX = 1$, $DX = \frac{61}{8}$, $\sigma \approx 2{,}76$;

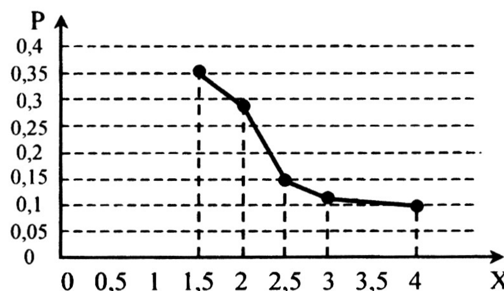
4) $P\{0 \le X\} = \frac{11}{16}$, $P\{X < 0\} = \frac{5}{16}$, $P\{0 < X < 9\} = \frac{7}{16}$,

$P\{EX - \sqrt{DX} < X < EX + \sqrt{DX}\} = \frac{5}{8}$, $P\{EX - 2\sqrt{DX} < X < EX + 2\sqrt{DX}\} = \frac{15}{16}$.

19. 1)

X	1,5	2	2,5	3	4
P	0,35	0,28	0,15	0,12	0,1

2)



3) $EX = 2{,}22$,
$DX \approx 0{,}6$.

20. 1)

X	1	2	3	4
P	0,8	$0{,}2 \cdot 0{,}8$	$0{,}2^2 \cdot 0{,}8$	$0{,}2^3$

2) $EX = 1{,}248$, $DX \approx 0{,}298$.

12. Įvairūs uždaviniai

1. $\frac{5}{14}$.

2. $P(A)=\frac{1}{2}$;

$P(B)=\frac{3}{10}$;

$P(C)=\frac{3}{20}$;

$P(D)=\frac{3}{20}$;

$P(E)=\frac{7}{20}$;

$P(F)=\frac{2}{5}$.

3. $\frac{3}{4}$.

4. $\frac{4}{105}$.

5. $\frac{5}{8}$.

6. $\frac{1}{120}$.

7. 0,4.

8. $\frac{1}{221}$.

9. $\frac{11}{36}$.

10. $\frac{1}{4}$.

11. 0,65.

12. $\frac{8}{11}$.

13. $P(A)=\frac{1}{21}$;

$P(B)=\frac{5}{42}$;

$P(C)=\frac{1}{3}$.

14. 0,4.

15. $\frac{48}{95}$.

16. 0,144.

17. $\frac{15}{16}$.

18. 0,86.

19. 0,79.

20. $\frac{5}{6}$.

21. 1) 0,46;

2) 0,6;

3) 0,42;

4) 0,12;

5) 0,58.

22. $EX=1{,}2$;

$DX=0{,}72$.

23. $MX=1\frac{2}{3}$;

$DX=1\frac{1}{9}$.

24. $\approx 0{,}387$.

25. $\frac{1}{3}$.

26. $\frac{1}{22}$.

27. $\frac{1}{6}$.

28. 0,3.

29. 0,6.

30. 1) 0,33;

2) 0,67.

13. Binominiai (Bernulio) bandymai. Bernulio formulė. Binominis skirstinys

1. $\frac{45}{1024}$.

2. a) $\frac{4375}{279936}$;

b) $\frac{187}{93312}$.

3. $\frac{19}{144}$.

4. $\frac{3125}{15552}\approx 0{,}2009$.

5. $\approx 0{,}3543$.

6. 0,73728.

7. a) 3 iš 4;

b) 2 iš 4;

c) ne mažiau 5 iš 8.

8. a)

X	0	1	2	3	4	5
P	$\frac{1}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{1}{32}$

b) EX = 2,5; DX = 1,25.

9. a)

X	0	1	2	3
P	0,512	0,384	0,096	0,008

b) EX = 0,6; DX = 0,48.

III skyrius

MATEMATINĖS STATISTIKOS PRADMENYS

1. Generalinė aibė ir imtis

1. 1) 5; 5; 5; 5; 6; 7; 7; 8; 8; 8; 9; 9; 9; 10; 10.

2)

x_k	5	6	7	8	9	10
m_k	4	1	2	3	3	2
p_k	$\frac{4}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{15}$

3) Dažnių suma lygi 15, santykinių dažnių suma lygi 1.

2. 1) 1,1; 1,4; 1,4; 1,7; 1,7; 1,7; 1,7; 2,1; 2,2; 2,2; 2,2; 2,4; 2,4; 2,4; 2,7; 2,7; 3,2; 3,2; 3,2; 3,2; 3,2; 3,5; 3,8; 4,2; 4,2.

2)

x_k	1,1	1,4	1,7	2,1	2,2	2,4	2,7	3,2	3,5	3,8	4,2
m_k	1	2	4	1	3	3	2	5	1	1	2
p_k	0,04	0,08	0,16	0,04	0,12	0,12	0,08	0,2	0,04	0,04	0,08

3) Dažnių suma lygi 25, santykinių dažnių suma lygi 1.

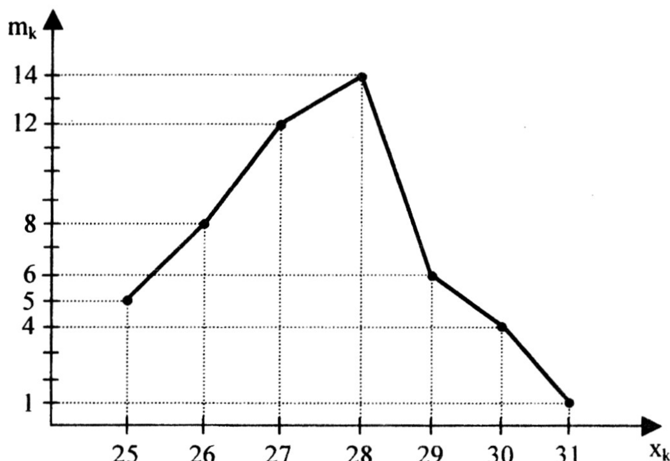
3.

1)

x_k	25	26	27	28	29	30	31
m_k	5	8	12	14	6	4	1
p_k	0,1	0,16	0,24	0,28	0,12	0,08	0,02

2) $\bar{x} = 27{,}48$, $S^2 \approx 0{,}6$.

3)



4. 1) 6, 6, 7, 7, 8, 8, 8, 8, 9, 10; 2) $c = 8$; $r = 4$; $\bar{x} = 7{,}7$;

3) dažnių suma lygi 10, santykinių dažnių suma lygi 1.

5. $\bar{x} = 4{,}4$; $S^2 = 5{,}028$; $S \approx 2{,}24$.

6. $r = 60$; $c = 70$; $\bar{x} = 68$.

7. Luko duomenys.

1) 1, 1, 3, 4, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 6, 6, 7, 7, 8, 8, 8, 8, 9; $r = 8$; $N = 20$.

2)

x_k	1	3	4	5	6	7	8	9
m_k	2	1	5	3	2	2	4	1
p_k	0,1	0,05	0,25	0,15	0,1	0,1	0,2	0,05

3) $\bar{x}_1 = 5{,}35$; $S_1^2 \approx 2{,}49$; $S_1 \approx 1{,}58$.

Rimo duomenys.

1) 2, 2, 4, 4, 4, 4, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 7, 7, 7, 7, 7, 8, 8, 8; $r = 6$; $N = 20$.

2)

x_k	2	4	6	7	8
m_k	2	4	6	5	3
p_k	0,1	0,2	0,3	0,25	0,15

3) $\overline{x}_2 = 5{,}75$; $S_2^2 \approx 1{,}27$; $S_2 \approx 1{,}13$.

4) Kadangi $S_1 > S_2$, todėl Lukui geriau sekėsi matematikos varžybose.

8. $r = 14$; $c = 11$; $\overline{x} = 11{,}4$.

9. $r = 10$; $c = 5$; $\overline{x} = 4$.

10. $\overline{x} = 10$; $S^2 = 24{,}4$; $S = 4{,}94$.

11. $\overline{x} = 11$; $S^2 = 6{,}2$; $S = 2{,}49$.

12. 1) $N = 11$; 2) $r = 1{,}42$; $c = 3{,}24$; mediana – 2,85; 3) $\overline{x} = 3{,}03$; $S^2 = 0{,}228$.

13. 1) Pirmosios grupės: $N_1 = 13$; $r_1 = 34$; mediana – 41; $c = 41$; Antrosios grupės: $N_2 = 11$; $r_2 = 30$; mediana – 40; $c = 39$; 2) $\overline{x}_1 = 42$; $S_1^2 \approx 129{,}84$; $\overline{x}_2 = 40$; $S_2^2 \approx 69$; 3) Kadangi $\overline{x}_2 < \overline{x}_1$, tai vidutinis reakcijos greitis antroje grupėje mažesnis, bet $S_2^2 < S_1^2$, todėl antroji grupė daugiau treniruota.

14. $\overline{x}_a = 3{,}625$, o $\overline{x}_b = 3{,}3$, todėl sėkmingiau pasirodė 12^a klasė.

$S_a^2 = 1{,}98$, o $S_b^2 = 2{,}33$. Didesniu stabilumu pasižymėjo 12^a klasė, nes jos dispersija mažesnė. Vadinasi, 12^a klasės išspręstų uždavinių skaičiai mažiau išsibarstę nuo vidurkio 3,625 negu 12^b klasės – nuo vidurkio 3,3.

15. $\overline{x}_J = 3{,}19$, $\overline{x}_P = 3{,}19$. Abu žaidėjai sužaidė vienodai sėkmingai: lygiosios.

$S_J^2 = 4{,}03$, $S_P^2 = 4{,}03$. Abu žaidėjai pasižymėjo ir vienodu stabilumu, nes jų surinktų taškų imčių dispersijos vienodos. Tai rodo, kad abiejų žaidėjų surinkti taškai vienodai išsibarstę nuo vidurkio 3,19.

16. $\bar{x}_a = 3{,}625$, o $\bar{x}_b = 3{,}3$, todėl sėkmingiau pasirodė 12[a] klasė.

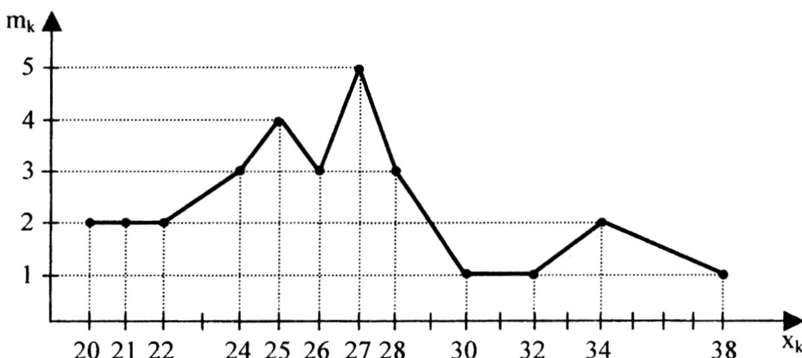
$S_a^2 = 1{,}98$, o $S_b^2 = 2{,}33$. Didesniu stabilumu pasižymėjo 12[a] klasė, nes jos dispersija mažesnė. Vadinasi, 12[a] klasės išspręstų uždavinių skaičiai mažiau išsibarstę nuo vidurkio 3,625 negu 12[b] klasės – nuo vidurkio 3,3.

17. 1) 20, 20, 21, 21, 22, 22, 24, 24, 24, 25, 25, 25, 25, 26, 26, 26, 27, 27, 27, 27, 27, 28, 28, 28, 30, 32, 34, 34, 34, 38.

2)

x_k	20	21	22	24	25	26	27	28	30	32	34	38
m_k	2	2	2	3	4	3	5	3	1	1	3	1

3)



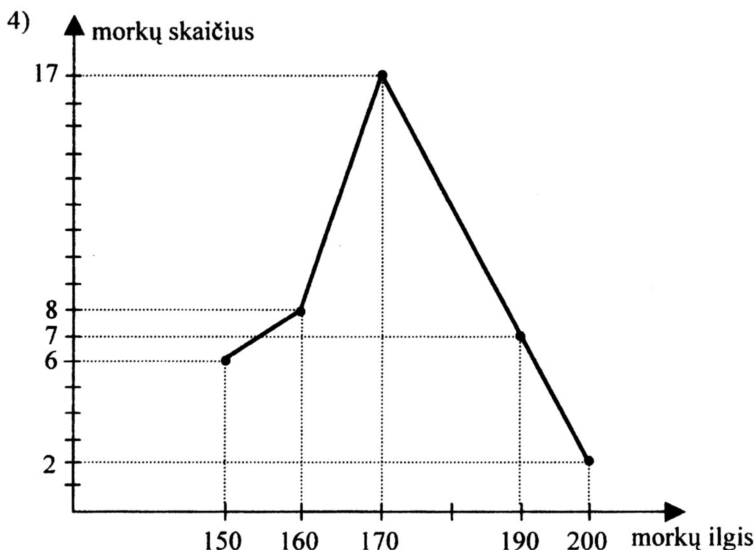
18. $\bar{x}_J = 3{,}19$, $\bar{x}_P = 3{,}19$. Abu žaidėjai sužaidė vienodai sėkmingai: lygiosios.

$S_J^2 = 4{,}03$, $S_P^2 = 4{,}03$. Abu žaidėjai pasižymėjo ir vienodu stabilumu, nes jų surinktų taškų imčių dispersijos vienodos. Tai rodo, kad abiejų žaidėjų surinkti taškai vienodai išsibarstę nuo vidurkio 3,19.

19. 1) N = 37; 2) $p_1 = \frac{6}{37}$; $p_2 = \frac{8}{37}$; $p_3 = \frac{14}{37}$; $p_4 = \frac{7}{37}$; $p_5 = \frac{2}{37}$;

3) $\bar{x} = 170$; $S^2 \approx 216{,}7$; $S \approx 14{,}7$;

4)

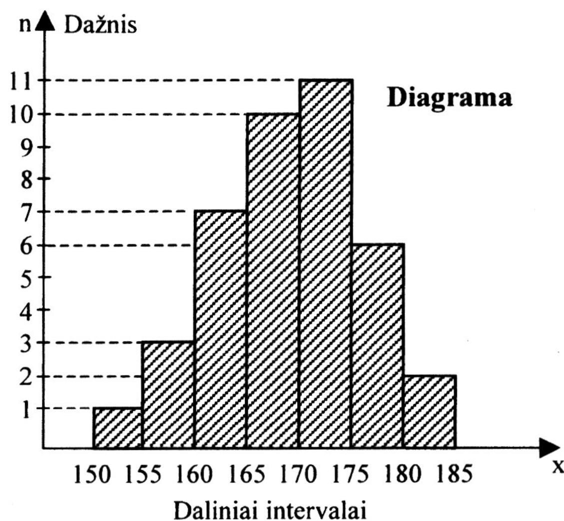


4. Stebėjimo duomenų grupavimas

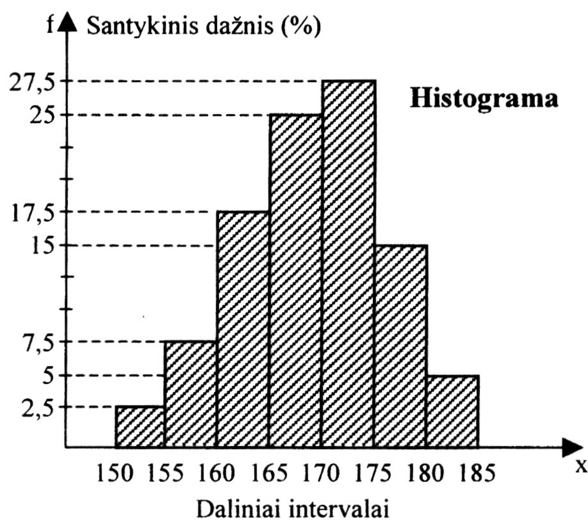
1. 1)

Dalinio intervalo numeris i	Daliniai intervalai	Dalinio intervalo dažnis n_i	Dalinio intervalo santykinis dažnis f_i
1	[150; 155)	1	0,025
2	[155; 160)	3	0,075
3	[160; 165)	7	0,175
4	[165; 170)	10	0,25
5	[170; 175)	11	0,275
6	[175; 180)	6	0,15
7	[180; 185)	2	0,05
	Dažnių suma:	40	1

2)


n
Dažnis
11
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
Diagrama
150 155 160 165 170 175 180 185
x
Daliniai intervalai

3)


f
Santykinis dažnis (%)
27,5
25
17,5
15
7,5
5
2,5
Histograma
150 155 160 165 170 175 180 185
x
Daliniai intervalai

Daliniai intervalai	Santykinis dažnis išreikštas dešimtaine trupmena	Santykinis dažnis išreikštas procentais
[150; 155)	0,025	2,5 %
[155; 160)	0,075	7,5 %
[160; 165)	0,175	17,5 %
[165; 170)	0,25	25 %
[170; 175)	0,275	27,5 %
[175; 180)	0,15	15 %
[180; 185)	0,05	5 %

Santykinių dažnių suma:

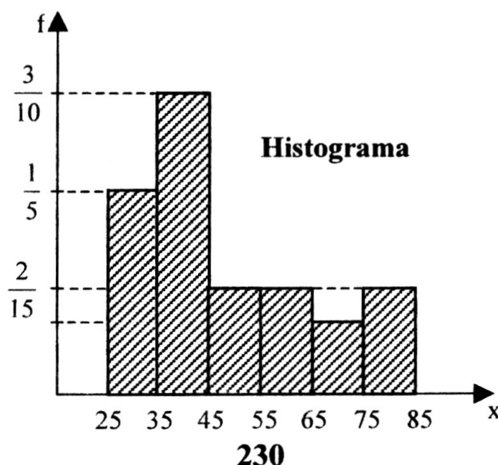
2,5 % + 7,5 % + 17,5 % + 25 % + 27,5 % + 15 % + 5 % = 100 %

2.

1), 2)

x_i	[25;35)	[35; 45)	[45; 55)	[55; 65)	[65; 75)	[75; 85)
n_i	6	9	4	4	3	4
f_i	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{15}$

3)

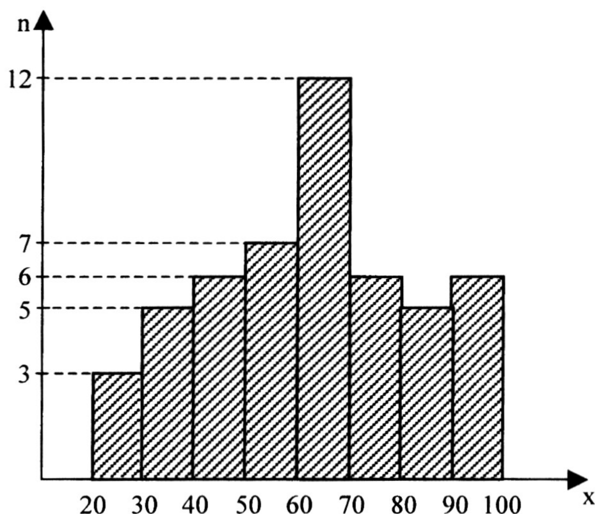


3.

1), 2), 3)

Dalinio intervalo numeris	Dalinis intervalas	Dalinio intervalo dažnis n_i	Dalinio intervalo santykinis dažnis f_i	Dalinio intervalo vidurio reikšmė z_i
1	[20; 30)	3	0,06	25
2	[30; 40)	5	0,1	35
3	[40; 50)	6	0,12	45
4	[50; 60)	7	0,14	55
5	[60; 70)	12	0,24	65
6	[70; 80)	6	0,12	75
7	[80; 90)	5	0,1	85
8	[90; 100)	6	0,12	95

4)

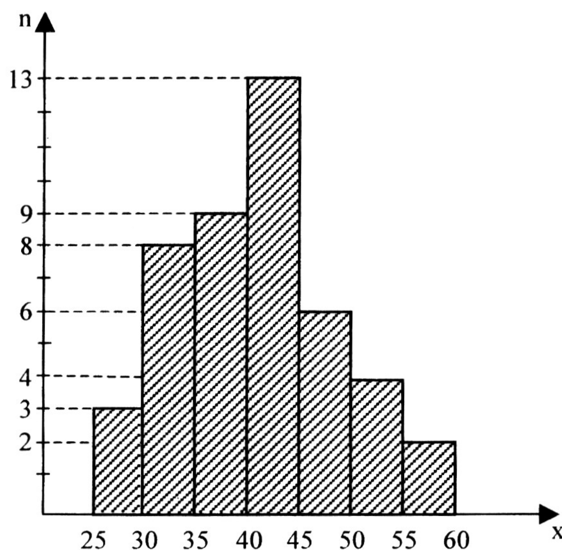


4.

1), 2)

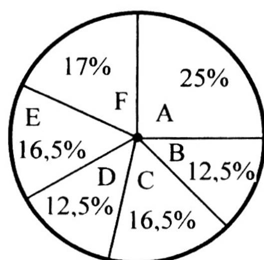
x_i	[25;30)	[30; 35)	[35; 40)	[40; 45)	[45; 50)	[50; 55)	[55; 60)
n_i	3	8	9	13	6	4	2
f_i	0,07	0,18	0,2	0,29	0,13	0,09	0,04

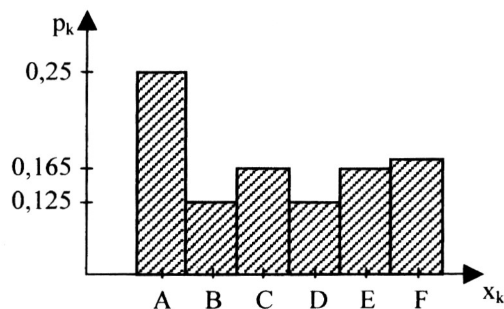
3)



5.

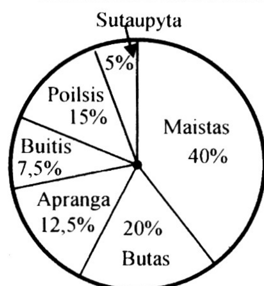
x_k	A	B	C	D	E	F
p_k	0,25	0,125	0,165	0,125	0,165	0,17

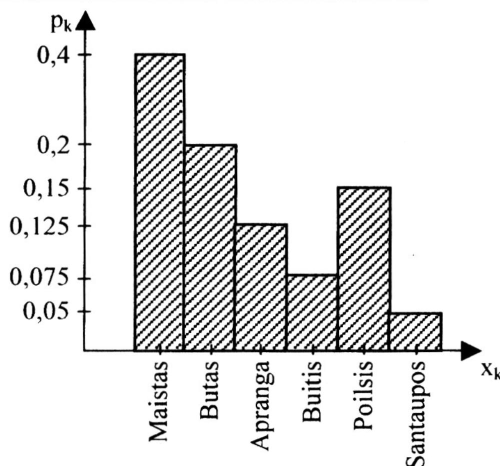




6.

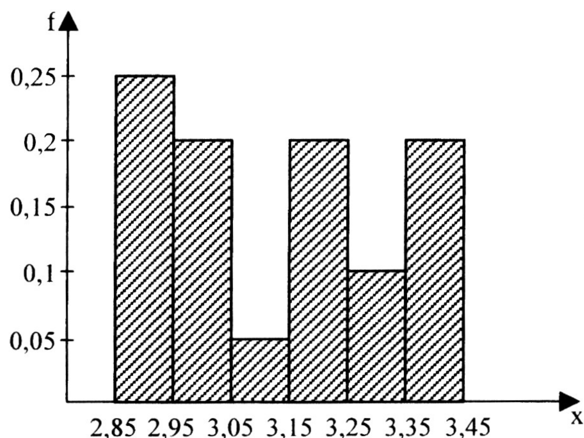
x_k	Maistas	Butas	Apranga	Buitis	Poilsis	Santaupos
p_k	0,4	0,2	0,125	0,075	0,15	0,05





7.

x_i	[2,85;2,95)	[2,95;3,05)	[3,05;3,15)	[3,15;3,25)	[3,25;3,35)	[3,35;3,45)
n_i	5	4	1	4	2	4
f_i	0,25	0,2	0,05	0,2	0,1	0,2



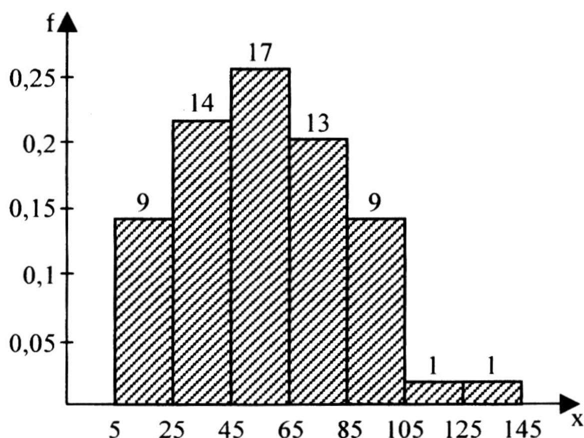
8. 1) variacinė eilutė: 10, 10, 10, 10, 10, 10, 20, 20, 20, 30, 30, 30, 30, 30, 30, 40, 40, 40, 40, 40, 40, 40, 40, 50, 50, 50, 50, 50, 50, 50, 50, 50, 50, 50, 60, 60, 60, 60, 60, 60, 70, 70, 70, 70, 70, 80, 80, 80, 80, 80, 80, 80, 80, 90, 90, 90, 90, 90, 90, 100, 100, 100, 110, 140;

2) $r = 130$; $N = 64$; 3) $\overline{x} \approx 56{,}4$; $S^2 \approx 804{,}3$; $S \approx 28{,}36$;

4)

x_i	[5;25)	[25; 45)	[45; 65)	[65; 85)	[85; 105)	[105; 125)	[125; 145)
n_i	9	14	17	13	9	1	1
f_i	0,14	0,22	0,26	0,2	0,14	0,02	0,02

5)

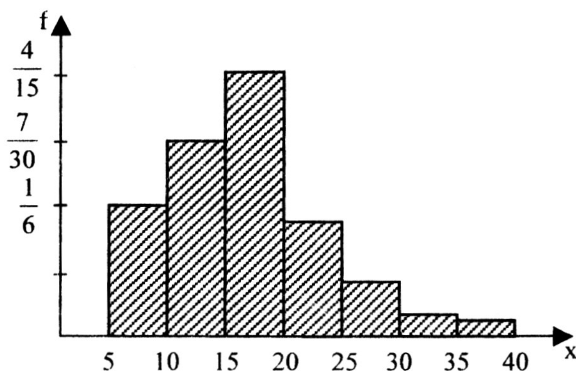


9.

1)

x_i	[5;10)	[10; 15)	[15; 20)	[20; 25)	[25; 30)	[30; 35)	[35; 40)
n_i	5	7	8	4	2	1	3
f_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{7}{30}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{10}$

2)

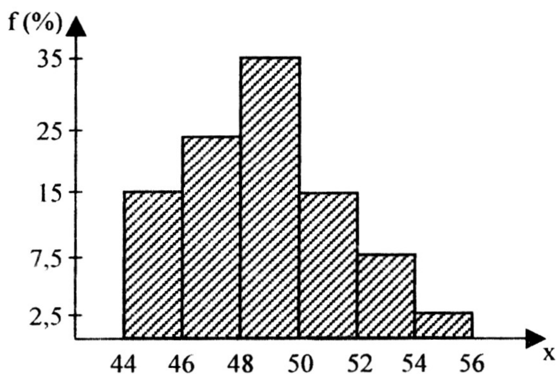


3) $\bar{x} \approx 18{,}13$.

10. 1)

x_i	[44; 46)	[46; 48)	[48; 50)	[50; 52)	[52; 54)	[54; 56)
n_i	6	10	14	6	3	1
f_i	0,15	0,25	0,35	0,15	0,075	0,025
f_i (%)	15	25	35	15	7,5	2,5

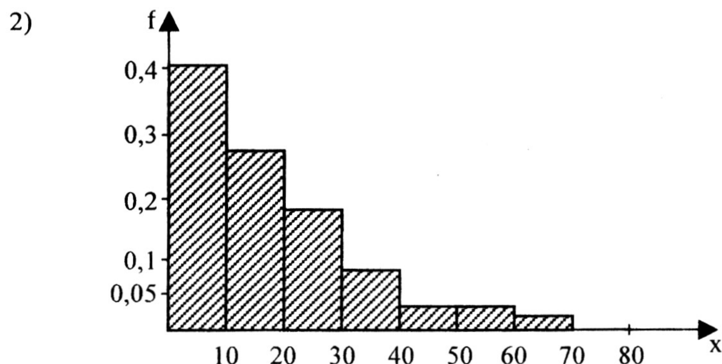
2)



11. 1)

x_i	[0;10)	[10; 20)	[20; 30)	[30; 40)	[40; 50)	[50; 60)	[60; 70)	[70; 80)
z_i	5	15	25	35	45	55	65	75
f_i	0,41	0,27	0,17	0,07	0,03	0,03	0,02	0

2)

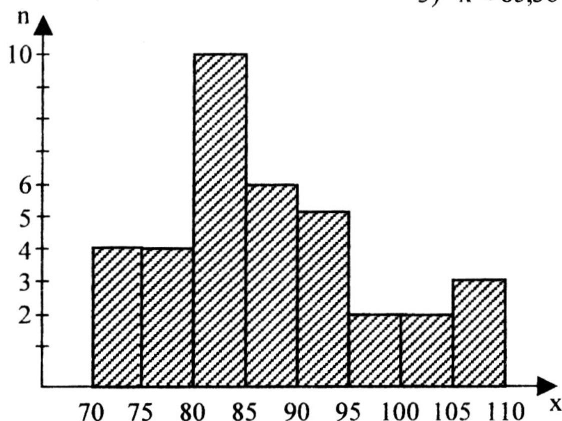


12. 1)

x_i	[70;75)	[75; 80)	[80; 85)	[85; 90)	[90; 95)	[95; 100)	[100; 105)	[105; 110)
n_i	4	4	10	6	5	2	2	3
f_i	0,11	0,11	0,28	0,16	0,14	0,06	0,06	0,08

2)

3) $\overline{x} \approx 85{,}36$



13. 1)

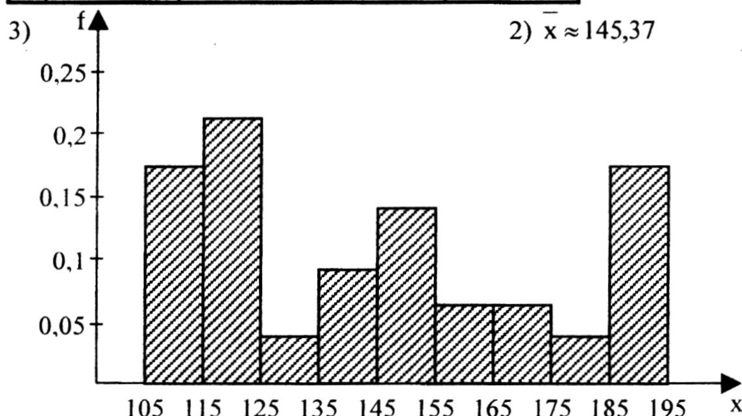
x_i	[105;115)	[115; 125)	[125; 135)	[135; 145)	[145; 155)
n_i	4	5	1	2	3
f_i	0,17	0,21	0,04	0,08	0,13

lentelės tęsinys:

x_i	[155; 165)	[165; 175)	[175; 185)	[185; 195)
n_i	2	2	1	4
f_i	0,08	0,08	0,04	0,17

2) $\overline{x} \approx 145{,}37$

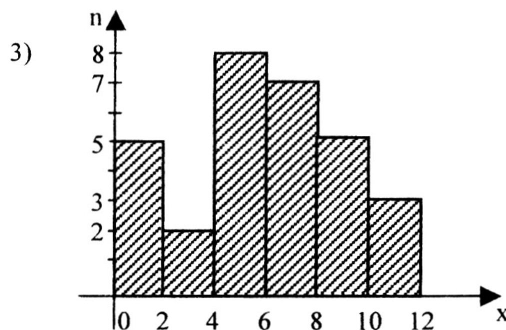
3)



14. 1), 2)

x_i	[0; 2)	[2; 4)	[4; 6)	[6; 8)	[8; 10)	[10; 12)	Suma
n_i	5	2	8	7	5	3	30
f_i	0,17	0,06	0,27	0,23	0,17	0,1	1

3)

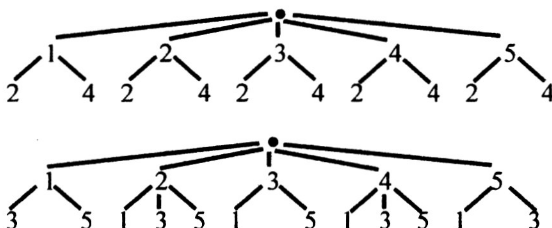


IV skyrius
TIKRINAMŲJŲ DARBŲ PAVYZDŽIAI
1. Kombinatorika

Besimokantiems matematiką pagal bendrojo kurso programą

1 variantas

1. 1) 10; 2) 12;



2. 30. **3.** 120. **4.** 1287. **5.** 1) 45; 2) $\frac{1}{36}$.

Besimokantiems matematiką pagal išplėstinio kurso programą

1 variantas

1. 1) 100; 2) 30. **2.** 1) 120; 2) 150. **3.** 1) 120 2) 10.
4. 1) 84; 2) 4. **5.** 1) 12; 2) 1320. **6.** 20.

2. Tikimybių teorijos pradmenys

Besimokantiems matematiką pagal bendrojo kurso programą

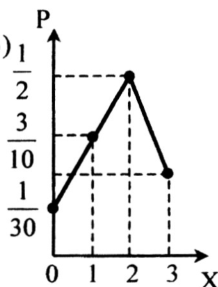
1 variantas

1. $\frac{3}{45}$. **2.** $\frac{3}{11}$. **3.** $\frac{1}{3}$.

4. 1)

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{30}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

2) 1,8; 3)



Besimokantiems matematiką pagal išplėstinio kurso programą

1 variantas

1. $\frac{5}{6}$. **2.** $\frac{5}{21}$. **3.** 0,98. **4.** $\frac{4}{315}$.

5. 1) 2) $\frac{8}{11}$.

X	0	1	2
P	$\frac{21}{55}$	$\frac{28}{55}$	$\frac{6}{55}$

3. Matematinės statistikos pradmenys

Besimokantiems matematiką pagal bendrojo kurso programą

1 variantas

1. 1) 32; 2) a) 5; b) 4,5; c) 6,06.

2. 1) 38; 2)

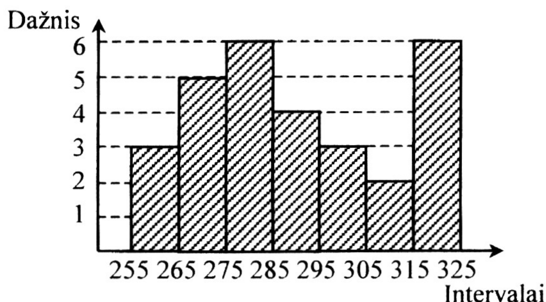
Dydžiai	40	42	44	46	48	50
Skaičius	2	4	6	10	12	4

3)

3. 1)

Intervalai	[255;265)	[265;275)	[275;285)	[285;295)	[295;305)	[305;315)	[315;325)
Dažniai	3	5	6	4	3	2	6

2)



Besimokantiems matematiką pagal išplėstinio kurso programą

1 variantas

1. 1) 19; 2)

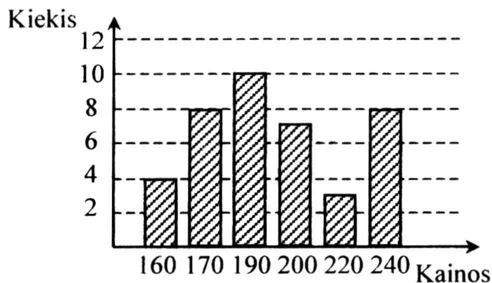
Pažymys	4	5	6	7	8	9	10
Kiekis	1	3	5	4	2	1	3

3) a) 6; b) 7; c) 6,95.

2. 1) 40; 2)

Kainos	160	170	190	200	220	240
Kiekis	4	8	10	7	3	8

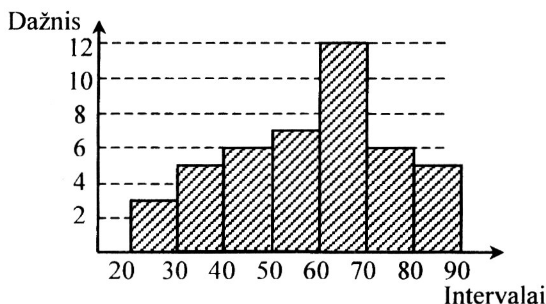
3) 197; 4)



3. 1); 2)

Intervalai	[20;30)	[30;40)	[40;50)	[50;60)	[60;70)	[70;80)	[80;90)
Dažniai	3	5	6	7	12	6	5
Santykinis dažnis	0,06	0,1	0,12	0,14	0,24	0,12	0,1

3)



4. Kombinatorika, tikimybių teorijos pradmenys ir matematinės statistikos pradmenys

Besimokantiems matematiką pagal bendrojo kurso programą

1 variantas

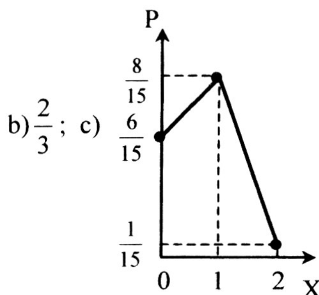
1. 1) 20; 2) 8

2. 1) 8; 2) $\frac{1}{3}$;

3) a)

X	0	1	2
P	$\frac{6}{15}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{1}{15}$

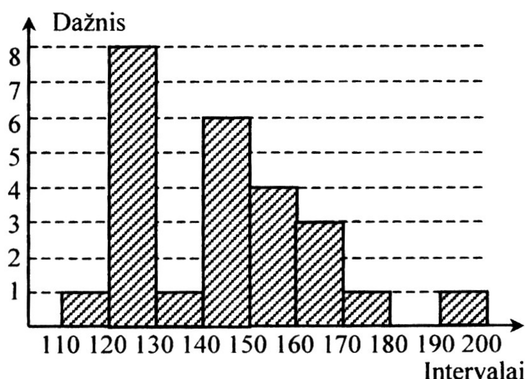
b) $\frac{2}{3}$; c)



3. 1) 2)

Intervalai	[110;120)	[120;130)	[130;140)	[140;150)	[150;160)	[160;170)	[170;180)	[180;190)	[190;200)
Dažniai	1	8	1	6	4	3	1	0	1
Santykinis dažnis	0,04	0,33	0,04	0,25	0,17	0,13	0,04	0	0,04

3) $\approx 145{,}1$; 4)



Besimokantiems matematiką pagal išplėstinio kurso programą

1 variantas

1. 1) 175; 2) $\frac{4}{165}$; 3) a) b) $\frac{14}{11}$; c) $\approx 0{,}42$.

X	0	1	2
P	$\frac{6}{55}$	$\frac{28}{55}$	$\frac{21}{55}$

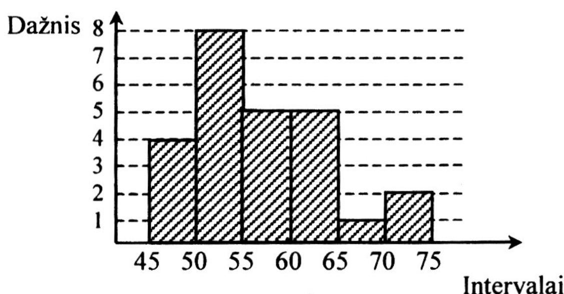
2. 0,65.

3. 1) r = 29, N = 25, c = 59,5; 2) $\approx 56{,}64$;

3)

Intervalai	[45;50)	[50;55)	[55;60)	[60;65)	[65;70)	[70;75)
Dažniai	4	8	5	5	1	2
Santykinis dažnis	$\frac{4}{25}$	$\frac{8}{25}$	$\frac{5}{25}$	$\frac{5}{25}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{2}{25}$

4.



UŽRAŠAMS

Vaidotas Mockus, Algidė Jocaitė

Kombinatorikos, tikimybių teorijos ir matematinės statistikos pamokų konspektai 10 – 12 klasių moksleiviams

2001 09 25. 15 leidyb. apsk. l. Užsakymo Nr. 3949
Išleido Vaidoto Mockaus įmonė, Mickevičiaus 31[a], 5400 Šiauliai.
Spausdino AB „Titnago spaustuvė“, Vasario 16 – osios g. 52, 5400 Šiauliai.